数理解析研究所講究録
第164巻 1972年 200-210

時間依存的な非線形発展方程式の解法についての一注意

電気通信大　渡辺　二郎

§1 序

前にヒルベルト空間Hにおいて次のような非線形の微分方程式に対するコーシー問題を考えた（[2]）：

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + \partial\varphi^t(u(t)) \ni g(t, u(t)) \quad (0 \leqq t \leqq T) \\ u(0) = a. \end{cases}$$

ここでφ^t $(0 \leqq t \leqq T)$はHから$(-\infty, +\infty]$の中への下半連続凸関数で，$\varphi^t \not\equiv +\infty$とする．$\partial\varphi^t$は$\varphi^t$のsub-differentialであり，各$u \in H$に対して

$$\partial\varphi^t(u) = \left\{ w \in H \mid \varphi(v) \geqq \varphi(u) + (w, v-u),\ \forall v \in H \right\}$$

を対応させる多価写像である．gは$[0, T] \times H$からHへの写像である．

次の結果を得た（[2]）．

定理 1.　次の4条件を仮定する．

(I) $\{u \in H \mid \varphi^t(u) < \infty\} \equiv D$ は t によらない。

(II) 任意の $r > 0$ に対して $c_r, c_r' > 0$ が存在して

$$|\varphi^s(u) - \varphi^t(u)| \leqq |s-t| \cdot [c_r \cdot \varphi^t(u) + c_r']$$
$$(0 \leqq s, t \leqq T, \ u \in D : \|u\| \leqq r).$$

(III) ある $b \in D$ が存在して

$$\int_0^T |\partial\varphi^t(b)| dt < \infty.$$

ここで

$$|\partial\varphi^t(b)| = \min\{\|w\| \mid w \in \partial\varphi^t(b)\}.$$

(IV) g は $[0,T] \times H$ から H への連続写像であり，B が H の有界部分集合のとき $g([0,T], B)$ は有界である。また，ある $c_0 > 0$ が存在して，すべての t と $u, v \in H$ に対して $(g(t,u) - g(t,v), u-v) \leqq c_0 \cdot \|u-v\|^2$ がなりたつ。

条件(I)－(IV)がみたされるならば，任意の $a \in D$ に対して $u \in C([0,T]; H)$ と $y \in L^2(0,T; H)$ が一意的に存在して

i) $u(t) \in D$ $(0 \leqq t \leqq T)$ かつ $y(t) \in \partial\varphi^t(u(t))$ (a. e. $0 \leqq t \leqq T$).

ii) $u(t) + \int_0^t y(\sigma) d\sigma = a + \int_0^t g(\sigma, u(\sigma)) d\sigma$ $(\forall t)$

がなりたつ。

条件(IV)が窮屈であるために，上の定理をそのままの形で

たとえば次のような問題に対して適用することはできない。条件(IV)をゆるめたい。

例. Ω は R^N の有界領域で，その境界 Γ はなめらかとする. $a_{ij}(x,t)$, $b_j(x,t)$, $c(x,t)$ は $\overline{\Omega}\times[0,T]$ 上のなめらかな実数値関数とする. $(i,j=1,2,\cdots,N)$.
$g(x,t,u)$ は $\Omega\times[0,T]\times(-\infty,\infty)$ 上の実数値関数で，各 $u\in L^2(\Omega)$ と各 t に対して $x\to g(x,t,u(x))$ は $L^2(\Omega)$ $(=H)$ に属し，$g:[0,T]\times L^2(\Omega)\ni(t,u)\to g(x,t,u)\in L^2(\Omega)$ は条件(IV)をみたすとする.

$$
(P.1)\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}=\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{j=1}^{N}b_j\frac{\partial u}{\partial x_j}-c\cdot u^{2p-1}+g(x,t,u) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (x\in\Omega,\ 0\leqq t\leqq T) \\
u(x,t)=0 \quad (x\in\Gamma,\ 0\leqq t\leqq T) \\
u(x,0)=a(x) \quad (x\in\Omega).
\end{cases}
$$

$$
(P.2)\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}=\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{j=1}^{N}b_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+g(x,t,u) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (x\in\Omega,\ 0\leqq t\leqq T) \\
-\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=c\cdot u^{2p-1} \quad (x\in\Gamma,\ 0\leqq t\leqq T) \\
u(x,0)=a(x) \quad (x\in\Omega).
\end{cases}
$$

ここで $a_{ij}(x,t)$ は一様に放物的であり，$c(x,t)\geqq 0$

かつある$\delta\in(0,1)$が存在して

$$(1)\quad \delta\leqq\frac{c(x,t)}{c(x,s)}\leqq\frac{1}{\delta}\quad(x\in\overline{\Omega},\ 0\leqq t,s\leqq T)$$

がなりたつとする．ただし（1）において$0/0=1$，$c>0$のとき$c/0=\infty$とする．またpは正整数である．νはa_{ij}に対する外向き余法線である．（P.2）において初期値aは

$$-\partial a/\partial\nu=c(x,0)a^{2p-1}\quad(x\in\Gamma)$$

をみたすものとする．

（P.2）は，たとえ$g\equiv 0$であっても，$p\geqq 2$の場合には非線形であることに注意する．

われわれの方法では（P.1）も（P.2）も同様に扱うことができるから，（P.2）についてだけ考えることにする．

（P.2）の場合，φ^tとして

$$\varphi^t(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j}\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx+\frac{1}{2p}\int_\Gamma c\cdot u^{2p}d\Gamma \\ \qquad\qquad (u\in H^1(\Omega)\text{かつ}c\cdot u^{2p}\in L^1(\Gamma)\text{のとき}) \\ \infty\quad(\text{そのたの}\ u\in L^2(\Omega)\text{に対して})\end{cases}$$

とおく（［1］参照）．このとき$\{u|\varphi^t(u)<\infty\}\equiv D$は$t$に無関係であり，$\partial\varphi^t$の定義域$D(\partial\varphi^t)$は

$$D(\partial\varphi^t)=\{u\in H^2(\Omega)\mid -\frac{\partial u}{\partial\nu}=c(x,t)u^{2p-1}\ (a.e.\ x\in\Gamma)\}$$

であり，各$u \in D(\partial\varphi^t)$に対して

$$\partial\varphi^t(u) = -\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

である．したがって（P.2）を

$$(\mathrm{P.2})' \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \partial\varphi^t(u) = f(t,u) \quad (0 \leqq t \leqq T) \\ u(0) = a \end{cases}$$

とかくことができる．ただし

$$(2)\ f(t,u) = \sum_j b_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} + g(x,t,u).$$

$H = L^2(\Omega)$とすれば，（P.2）$'$に対して条件(I)−(III)はなりたつが，条件(IV)はなりたたない．

§2．結果と応用例

一般の実ヒルベルト空間Hにおいて定理1の条件(I)−(III)をみたすφ^tが与えられているとする．コーシー問題

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + \partial\varphi^t(u(t)) \ni f(t,u(t)) \quad (0 \leqq t \leqq T) \\ u(0) = a \end{cases}$$

を考える．ここで，fは各$t \in [0,T]$と各$u \in D(\partial\varphi^t)$に対して$f(t,u) \in H$を対応させる写像とする．$f$に対して次の諸条件をみたす列$\{f_n\}$をとることができると仮定する．

（V）　f_n $(n = 1, 2, \cdots)$は$[0,T] \times H$からHへの連続写

像であり，各nと各有界集合$B \subset H$に対して$f_n([0,T],B)$は有界である．各nに対して実数γ_nが存在して

$$(f_n(t,u)-f_n(t,v),\ u-v) \leqq \gamma_n \|u-v\|^2 \quad (\forall t, \forall u, v).$$

(VI) $C([0,T];H)$において列$\{u_n\}$がu_0に強収束するとする．もし$f_n(t,u_n)$が$L^2(0,T;H)$においてあるvに弱収束し，$\sup\{\varphi^t(u_n(t)) \mid 0 \leqq t \leqq T,\ n=1,2,\cdots\} < \infty$，かつ$u_0(t) \in D(\partial\varphi^t)$ a.e. ならば

$$f(t,u_0(t)) = v(t) \quad \text{a.e. } 0 \leqq t \leqq T.$$

(VII) 任意の$r>0$に対してc_r, $c_r' > 0$が存在して
$\|f_n(t,u)\|^2 \leqq c_r \varphi^t(u) + c_r'$ $(\forall n, \forall t, \forall u \in D : \|u\| \leqq r)$.

(VIII) ある実数γが存在して

i) 任意のn, t, $u \in D(\partial\varphi^t)$, $u_1 \in \partial\varphi^t(u)$, $v \in D(\partial\varphi^t)$, $v_1 \in \partial\varphi^t(v)$に対して

$$([f_n(t,u)-f_n(t,v)] - [u_1 - v_1],\ u-v) \leqq \gamma \|u-v\|^2.$$

ii) 任意の$\varepsilon>0$と$r>0$に対してある正整数$n_{\varepsilon r}$が存在して，各n, $m \geqq n_{\varepsilon r}$，各$t$，各$u$, $v \in D(\partial\varphi^t) : \|u\| \leqq r$, $\|v\| \leqq r$, $\varphi^t(u) \leqq r$, $\varphi^t(v) \leqq r$，各$u_1 \in \partial\varphi^t(u)$および各$v_1 \in \partial\varphi^t(v)$に対して

$$([f_n(t,u)-f_m(t,v)] - [u_1 - v_1],\ u-v) \leqq \gamma \|u-v\|^2 + \varepsilon.$$

定理 2．以上の仮定のもとで，任意の$a \in D$に対して一

意的に $u \in C([0,T];H)$ と $y \in L^2(0,T;H)$ が存在して

i) $u(t) \in D$ $(0 \leqq t \leqq T)$ かつ $y(t) \in \partial\varphi^t(u(t))$ (a.e. $0 \leqq t \leqq T$).

ii) $f(t,u(t)) \in L^2(0,T;H)$.

iii) $u(t)+\int_0^t y(\sigma)d\sigma = a+\int_0^t f(\sigma,u(\sigma))d\sigma$ $(0 \leqq t \leqq T)$.

定理1の証明に類似の方法により，定理2を証明することができるが，ここでは証明しない．

(P. 2)′ に対して定理2が適用できることを示そう．この場合の f に対して $\{f_n\}$ をどのようにとればよいか．(2)で与えられる f のかわりに，簡単のために

$$f(t,u) = b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}$$

とする．ここで b は $\tilde{\Omega}\times[0,T]$ 上のなめらかな関数である．$\tilde{\Omega}$ は R^N の開集合で，Ω の閉包を含むものとする．Ω の境界 Γ がなめらかであるから，連続線形作用素 $E : L^2(\Omega) \to L^2(\tilde{\Omega})$ で次の諸条件をみたすものが存在する：

$$\begin{cases} \text{各 } u \in L^2(\Omega) \text{ に対して } Eu \text{ の } \Omega \text{ への制限は } u \text{ に等しい．} \\ \text{各 } u \in H^1(\Omega) \text{ に対して } Eu \in H^1(\tilde{\Omega}). \\ E \text{ の } H^1(\Omega) \text{ への制限は } H^1(\Omega) \to H^1(\tilde{\Omega}) \text{ として連続である．} \end{cases}$$

$$f_n(t,u) = b(x,t)\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho_n * Eu) \quad (0 \leqq t \leqq T,\ u \in L^2(\Omega))$$

とおく．ここで $\rho_n *$ は軟化子を表わすものとする．

f_n が条件(V)–(VIII)をみたすことを証明する．

(V) 各 n に対して実数 γ_n が存在して

$$(f_n(t,u)-f_n(t,v),\ u-v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega b(x,t)\frac{\partial \rho_n}{\partial x_1} * E(u-v)\cdot(u-v)\,dx$$
$$\leqq \gamma_n \|u-v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

(VI) $Q=[0,T]\times\Omega$ とおく．$L^2(\Omega)$ で $u_n \to u_0$ (強) かつ $L^2(Q)$ で $f_n(t,u_n) \to v$ (弱) ならば $f(t,u_0)=v$ がなりたつことを証明することは容易である．

(VII) 2正数 C, C' が存在して

$$\|f_n(t,u)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqq C\varphi^t(u) + C'\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad (\forall n, \forall t, \forall u \in L^2(\Omega)).$$

なぜならば，C, C', $C''>0$ が存在して

$$\|f_n(t,u)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqq C''\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leqq C\varphi^t(u) + C'\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

(VIII) $u, v \in D(\partial\varphi^t)$, $u_1 = \partial\varphi^t(u)$, $v_1 = \partial\varphi^t(v)$ とする．したがって $u \in H^2(\Omega)$ であり

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = c(x,t)\cdot u^{2p-1} \quad \text{a.a. } x \in \Gamma \\ u_1 = -\displaystyle\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \end{cases}$$

をみたす．v, v_1 に対しても同様である．したがって

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial(u-v)}{\partial\nu}\cdot(u-v)\,d\Gamma \leqq 0.$$

したがって一様放物性により $\mu>0$ が存在して

$$(3)\quad \begin{aligned}(u_1-v_1, u-v)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega}\sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial(u-v)}{\partial x_j}dx - \\ &-\int_{\Gamma}\frac{\partial(u-v)}{\partial\nu}(u-v)\,d\Gamma \geqq \mu\cdot\sum_i\left\|\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

次に

$$\begin{cases}\mathrm{I} = (f_n(t,u)-f_n(t,v), u-v)_{L^2(\Omega)} \\ \mathrm{II} = (f_n(t,v)-f_m(t,v), u-v)_{L^2(\Omega)}\end{cases}$$

とおく．$(f_n(t,u)-f_m(t,v), u-v)_{L^2(\Omega)} = \mathrm{I}+\mathrm{II}$ である．

任意の $\varepsilon>0$ に対して $C_\varepsilon>0$ が存在して

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \int_{\Omega} b\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho_n * E(u-v))\cdot(u-v)\,dx \\ &\leqq \varepsilon\cdot\left\|\rho_n * \frac{\partial E(u-v)}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\varepsilon\|u-v\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

がなりたつこと と u, v と n に無関係な $C>0$ が存在して

$$\left\|\rho_n * \frac{\partial E(u-v)}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)} \leqq C\|u-v\|_{H^1(\Omega)}$$

がなりたつことから，(3) により u, v, n に無関係な γ が存在して

$$\mathrm{I} \leqq (u_1-v_1, u-v)_{L^2(\Omega)} + \gamma\|u-v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

がなりたつ．したがって(Ⅷ) i) をみたすことがわかった．

(Ⅷ) ii) をみたすことを示すために次のことに注意する．任意の $\varepsilon>0$ と $r>0$ に対して正整数 $n_{\varepsilon r}$ が存在して，$u\in H^1(\Omega)$, $\|u\|_{H^1(\Omega)}\leqq r$, $n\geqq n_{\varepsilon r}$ ならば

$$(4)\quad \int_\Gamma |(\rho_n * Eu)(x)-u(x)|^2 d\Gamma \leqq \varepsilon$$

かつ

$$(5)\quad \int_\Omega |(\rho_n * Eu)(x)-u(x)|^2 dx \leqq \varepsilon .$$

なぜならば，まず任意の $\beta>0$ に対して

$$(6)\quad \lim_{|y|\to 0}\ \sup_{\|w\|_{H^1(\hat{\Omega})}\leqq\beta} \int_\Gamma |w(x-y)-w(x)|^2 d\Gamma = 0 .$$

また，ほとんどすべての $x\in\Gamma$ に対して

$$(\rho_n * Eu)(x)-u(x)=\int_{|y|\leqq\frac{1}{n}} \rho_n(y)[Eu(x-y)-Eu(x)]dy$$

であるから，シュワルツの不等式を用いて

$$\|\rho_n * Eu-u\|^2_{L^2(\Gamma)} \leqq \sup_{|y|\leqq\frac{1}{n}} \int_\Gamma |Eu(x-y)-Eu(x)|^2 d\Gamma .$$

よって(6)により(4)を得る．(5)についても同様である．

$$\mathrm{II}=\int_\Omega b\frac{\partial}{\partial x_1}[(\rho_n-\rho_m)*Ev](u-v)dx$$

$$= -\int_\Omega [(\rho_n - \rho_m) * Ev] \frac{\partial [b(u-v)]}{\partial x_1} dx +$$
$$+ \int_\Gamma b [(\rho_n - \rho_m) * Ev] \cdot (u-v) \cos(x_1, n) d\Gamma$$

であるから，上の注意により，任意の $\varepsilon > 0$ と $r > 0$ に対して正整数 $n_{\varepsilon r}$ が存在して，$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqq r$，$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqq r$ かつ $n, m \geqq n_{\varepsilon r}$ ならば $|\text{II}| \leqq \varepsilon$．したがって (VIII) ii) をみたすことがわかった。

文　献

[1]　H. Brezis, Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires, Israel J. Math. 9, 513 - 534 (1971).

[2]　渡辺二郎，ある種の時間依存的な非線形発展方程式について，京都大学数理研講究録 134 (1972年1月).