数理解析研究所講究録
第166巻 1972年 8-17

C^*-代数の同型写像について

東北大　教養　岡安隆照

§1. 主定理など.

von Neumann代数Mから von Neumann代数Nの上への同型写像ρは，MからNへの*同型写像μと，Mの内部自己同型写像で正の正則な要素で定義されたものϕとの積として一意に書けることがわかっている：

$$\rho = \mu\phi \quad ([4]).$$

この事実は所謂作用素の極分解との類似性から自己同型写像の極分解と名づけたのであるが，作用素の極分解と比較するとき分解の条件があまりきれいでないことが不満であると言わざるを得ない。しかしこの不満をとり除きたいという我々の目的はこの小論でほぼ達せられるであろう．そのために我々はC^*-代数の自己同型写像について，その自己共役性と正値性をうまく定義する．

ところで，von Neumann代数の微分，即ちその上の線型

写像で任意の二つの要素x, yの対に対して

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$$

を満すものがすべて内部微分であることは66年に境[5]やKadison[3]によって示されたが，von Neumann代数以外のC^*-代数も時にはこの性質を具えている．実際境[6]は単純で単位をもつC^*-代数が，又Elliott[1]はIII型のAW*-代数がこの性質を具えていることを示した．この性質は以下の我々の議論では非常に都合がよいもので，便宜上我々はそれに性質(D)という名前を与える．

さて我々の目的とする定理は次の通りである．なお議論を簡潔にするためにこの小論では単位をもつC^*-代数のみを扱うことにしよう．

主定理　性質(D)をもつC^*-代数AからC^*-代数Bの上への同型写像ρに対してAからBの上への*同型写像μと，Aの正値自己同型写像φが一意に存在して

$$\rho = \mu\varphi$$

が成り立つ．更に対応$\rho \to (\mu, \varphi)$はmetricalに両側連続である．

H, KをHilbert空間，sをHからK上への可逆な有界線型写像とするとき

$$\mathrm{Ad}\, s(x) = sxs^{-1} \quad \text{for } x \in \mathcal{L}(H)$$

は$\mathcal{L}(H)$から$\mathcal{L}(K)$の上への同型写像である．更にC^*-代数

A, B がそれぞれ H, K 上に作用しているとき $\mathrm{Ad}\,s(A) = B$ ならば $\mathrm{Ad}\,s$ の A 上への制限 $\mathrm{Ad}\,s | A$ は A から B 上への "spatial な" 同型写像になる。spatial な *同型写像は必ず等距離線型写像によって定義されることは自然である。

C^*-代数 A の，その maximal left ideal I による商空間 A/I は Hilbert 空間になる。A の maximal left ideal の全体を $\mathfrak{X}(A)$，A から A/I への自然な準同型写像を $(\ )_I$，$A_I = A/I$ の直和を $H(A)$，そしてその上への A の自然な表現を Φ_A と書くことにしよう。勿論 $H(A)$ は A_I を自然に含んでいると考えられる。

次に B も C^* 代数で，ρ が A から B 上への同型写像ならば，各 $I \in \mathfrak{X}(A)$ に対して $\rho(I) \in \mathfrak{X}(B)$ で，写像

$$s_I(x_I) = \rho(x)_{\rho(I)} \quad \text{for } x \in A$$

は well-defined になる。更に $s = \sum_I s_I$ とするとこれは $H(A)$ から $H(B)$ の上への可逆な有界線型写像であり，しかも

$$\rho = \Phi_B^{-1}(\mathrm{Ad}\,s | \Phi_A(A))\,\Phi_A$$

を満たすことが調べられる。なお ρ が *同型写像であるためには s が等距離線型写像であることが必要且十分になる。

C^* 代数 A の正則な要素を a とするとき

$$\mathrm{Ad}\,a(x) = axa^{-1} \quad \text{for } x \in A$$

は明らかに A の自己同型写像であるが，自己同型写像がこの

形をもつならばそれは内部自己同型写像であるという．$\mathrm{Ad}\,a$ の spectrum $Sp(\mathrm{Ad}\,a)$ と a の spectrum $Sp(a)$ との間には

$$Sp(\mathrm{Ad}\,a) \subseteqq Sp(a)Sp(a)^{-1} = \{\lambda\mu^{-1} : \lambda, \mu \in Sp(a)\}$$

なる関係が確かめられる．

§2. 内部自己同型写像と内部微分の或る関係．

C^*-代数 A の微分が，a を A の要素として

$$\mathrm{ad}\,a(x) = ax - xa \quad \text{for } x \in A$$

の形をもつとき，それは内部微分であるという．$Sp(\mathrm{ad}\,a)$ については

$$Sp(\mathrm{ad}\,a) \subseteqq Sp(a) - Sp(a) = \{\lambda - \mu : \lambda, \mu \in Sp(a)\}$$

なる関係をみることが出来る．

補題　B を C^*-代数，A をその部分 C^*-代数とし，a を B の要素で $\mathrm{ad}\,a$ が A を不変にするようなものであるとする．このとき $\mathrm{ad}\,a|A$ が * 微分，即ち * を保存する微分であるための必要十分条件は B の自己共役な要素 h が存在して

$$\mathrm{ad}\,a|A = i\,\mathrm{ad}\,h|A$$

となることである．

定理　(i) C^*-代数 A の要素 a に対して，$\mathrm{Ad}\exp a = \exp \mathrm{ad}\,a$．

(ii) C^*-代数 A の要素 a が負の半軸を含まない半平面に含まれていれば

$$\underline{\mathrm{Log}\,\mathrm{Ad}\,a = \mathrm{ad}\,\mathrm{Log}\,a.}$$

<u>但しLogは複素平面から負の半軸を除いた領域へのlogの解析接続である.</u>

証明 (i)
$$\rho(t) = \mathrm{Ad}\exp ta, \quad -\infty < t < \infty$$
とおくと $\{\rho(t)\}$ は metrical に連続な一径数群をなし，その生成作用素は直接の計算から $\mathrm{ad}\,a$ であることがわかり，
$$\mathrm{Ad}\exp ta = \rho(t) = \exp t\,\mathrm{ad}\,a.$$

(ii) 適当に実数 θ を選べば，$b = \theta 1 + \mathrm{Log}\,a$ とおくとき
$$Sp(b) \subseteq \{\lambda : |\mathrm{Im}\,\lambda| < \tfrac{\pi}{2}\}$$
であるように出来て，$\exp b = e^{i\theta}a$. 従って(i)から
$$\mathrm{Ad}\,a = \mathrm{Ad}\,e^{i\theta}a = \mathrm{Ad}\exp b = \exp\mathrm{ad}\,b = \exp\mathrm{ad}\,\mathrm{Log}\,a.$$
いま $\mathfrak{A}$ を $\mathrm{ad}\,b$ と恒等写像とが生成した $\mathcal{L}(A)$ の閉部分代数とするときLorchの定理から
$$\mathrm{Log}\,\mathrm{Ad}\,a = \mathrm{ad}\,\mathrm{Log}\,a + 2\pi i \sum_\nu n_\nu j_\nu.$$
ここに j_ν は巾等要素 $\neq 0$，n_ν は整数である．従って $\mathfrak{A}$ の任意の乗法的な線型汎函数 f に対して
$$f(\mathrm{Log}\,\mathrm{Ad}\,a) = f(\mathrm{ad}\,\mathrm{Log}\,a) + 2\pi i \sum_\nu n_\nu f(j_\nu).$$
一方，
$$Sp(\mathrm{Log}\,\mathrm{Ad}\,a) \subseteq \{\lambda : |\mathrm{Im}\,\lambda| < \pi\},$$
$$Sp(\mathrm{ad}\,\mathrm{Log}\,a) = Sp(\mathrm{ad}\,b) \subseteq \{\lambda : |\mathrm{Im}\,\lambda| < \pi\}$$
であるから $f(j_\nu) = 0$ でなければならない．従って j_ν は $\mathfrak{A}$ の

根基に入ることになり，結局 $n_\nu=0$ でなければならない．
故に

$$\mathrm{Log}\,\mathrm{Ad}\,a = \mathrm{ad}\,\mathrm{Log}\,a$$

である、証了．

次の定理は上の定理の第一の応用である：

Gardner の定理[2]　S は C^*−代数 A の閉部分空間であるとし，A の要素 a の spectrum は負の半軸を含まない半平面に含まれていて，$\mathrm{Ad}\,a$ は S を不変にしているとする．このとき $\mathrm{ad}\,\mathrm{Log}\,a$ 及び $\mathrm{Ad}(\exp t\,\mathrm{Log}\,a)$ は S を不変にする．

又第二の応用として次の定理も示される：

定理　A を C^*−代数 B の部分 C^*−代数で，単位をもち且性質(D)をもつものとする．B の正則な要素 a の spectrum が負の半軸を含まない半平面に含まれ，且 $\mathrm{Ad}\,a$ が A を不変にしているならば，$\mathrm{Ad}\,a|A$ は A の内部自己同型写像である．

証明．A は性質(D)をもつから，A の要素 b が

$$\mathrm{ad}\,\mathrm{Log}\,a|A = \mathrm{ad}\,b$$

を満たしつつ存在するが，$c=\exp b$ とおけば

$$\mathrm{Ad}\,a|A = \exp\mathrm{ad}\,b = \exp\mathrm{ad}\,\mathrm{Log}\,c = \mathrm{Ad}\,b$$

であるから $\mathrm{Ad}\,a|A$ は A の内部同型写像である、証了．

§3. 自己共役な同型写像と正値自己同型写像．

11

C^*-代数AからC^*-代数Bの上への同型写像ρに対して,

$$\rho^*(y) = (\rho^{-1}(y^*))^* \quad \text{for } y \in B$$

はBからAの上への同型写像になることはいうまでもないが, これをρに共役な同型写像と呼ぶ. そして特にB=Aで, ρがAの自己同型写像であるとき, $\rho^* = \rho$ ならばρは自己共役であるという. $(\rho^*)^{-1} = (\rho^{-1})^*$, $\rho^{**} = \rho$ や $\|\rho^*\| = \|\rho\|$ などはすぐにわかる. 又写像$\rho \to \rho^*$は metrical に連続であることが

$$\|\rho^* - \sigma^*\| \leqq \|\rho^{-1}\| \|\rho - \sigma\| \|\sigma^{-1}\|$$

からわかる. 更にρが*同型写像であることと, $\rho^*\rho$ 及び $\rho\rho^*$ が共に恒等写像であることとは同値である.

補題. AをC^*-代数Bの部分C^*-代数とし, aをBの正則な要素で, $\mathrm{Ad}\,a|A$ がAの自己同型写像であるようなものとする. このとき $\mathrm{Ad}\,a^*|A$ もAの自己同型写像で,

$$(\mathrm{Ad}\,a|A)^* = \mathrm{Ad}\,a^*|A.$$

さてC^*-代数Aの自己共役な自己同型写像ρが正の spectrum をもつとき, ρは正値であるという.

補題. AはC^*-代数Bの部分C^*-代数で単位を含みかつ性質(D)をもつものとし, aはBの正で正則な要素で, $\mathrm{Ad}\,a$ がAを不変にしているようなものとする. このときAの正で正則な要素bで, $\mathrm{Ad}\,a|A = \mathrm{Ad}\,b$ を満たすものがあり, 従って又

$\mathrm{Ad}\,a|A$ はAの正値自己同型写像である。

§4. 主定理の証明.

次に我々は C^*–代数の同型写像の絶対値と，自己同型写像の平方根を定義する．

定理 (i) ρ が C^*–代数Aから C^*–代数B上への同型写像ならば，$\rho^*\rho$ はAの正値自己同型写像であり，Aの正値自己同型写像 σ で $\sigma^2=\rho^*\rho$ を満たすものが一意に存在する．この σ を $|\rho|$ と書くことにする．

(ii) ρ が C^*–代数Aの自己同型写像ならば，ρ が正値であることと，$\rho=|\rho|$ であることが同値であり，特にAが性質(D)をもっていれば ρ が正の正則な要素で定義された内部自己同型写像であることも同値である．そしてこのときにはAの正値自己同型写像 τ で $\tau^2=\rho$ を満たすものが一意に存在する．この τ を $\sqrt{\rho}$ と書くことにする．

証明．(i)
$$\rho^* = \Phi_B^{-1}(\mathrm{Ad}\,s^*|\Phi(A))\Phi_A$$
であるから
$$\rho^*\rho = \Phi_B^{-1}(\mathrm{Ad}\,s^*s|\Phi_A)\Phi_A.$$
これは勿論正値．Gardner の定理から $\sigma=\mathrm{Ad}|s||\Phi(A)$ は $\Phi(A)$ の自己同型写像で正値，且 $\sigma^2=\rho^*\rho$．

いま $\sigma'^2=\rho^*\rho=\sigma^2$ とすれば，$Sp(\sigma)$，$Sp(\sigma')$ は共に正だか

ら

$$\sigma' = \exp \frac{1}{2} \log \rho^* \rho = \sigma.$$

(iii)については省く、証了.

さて主定理を示す為にもはや十分の用意が出来た:

主定理の証明. $\varphi = |\rho|$ は A の正値自己同型写像である、又 $\mu = \rho\varphi^{-1}$ については

$$\mu^*\mu = \varphi^{-1}\rho^*\rho\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi^2\varphi^{-1} = \text{“恒等写像”},$$
$$\mu\mu^* = \rho\varphi^{-2}\rho^* = \rho\rho^{-1}(\rho^*)^{-1}\rho^* = \text{“恒等写像”}$$

であるから，それは A から B への*同型写像である、次に $\rho = \mu'\varphi'$ とすれば $\varphi' = \mu'^{-1}\rho$ だから $\varphi'^* = \rho^*\mu'$ で

$$\varphi' = \sqrt{\varphi'^*\varphi'} = \sqrt{\rho^*\mu'\mu'^{-1}\rho} = \sqrt{\rho^*\rho} = \varphi.$$

従って又 $\mu' = \rho\varphi' = \rho\varphi = \mu$.

更に，spectrum の連続性と 2nd resolvent equation を利用することにより写像 $\rho \to \sqrt{\rho}$ が連続であることがわかり，従って更に $\rho \to \varphi = |\rho|$ 及び $\rho \to \mu = \rho\varphi^{-1}$ が連続であることがわかる、証了.

References

1. G. A. Elliott, On derivations of AW*-algebras, To appear.

2. L. T. Gardner, On isomorphisms of C*-algebras, Amer. J. Math. 87 (1965), 384–396.

3. R. V. Kadison, Derivations of operator algebras, Ann. Math. 83 (1966), 280–293.

4. T. Okayasu, A structure theorem of automorphisms of von Neumann algebras, Tohoku Math. J. 20 (1968), 199–206.

5. S. Sakai, Derivations of W*-algebras, Ann. Math. 83 (1966), 273–279.

6. S. Sakai, Derivations of simple C*-algebras, J. Functional Analysis 2 (1968), 202–206.