数理解析研究所講究録
第 166 巻 1972 年 77-91

作用素環の微分と自己同型写像

東工大 木島洋一 村上潔

序. Kadison-Ringrose "Derivations and Automorphisms of Operator Algebras" Commun. math Phys. 4, 32-63 (1967) の内容を紹介します。論文はⅠ～Ⅳの部分に分れており、Ⅰ～Ⅲは主に一般論、Ⅳは特殊例についての考察になっています。Ⅰ～Ⅲは木島、Ⅳは村上が受けもちました。

§Ⅰ～Ⅲ (一般論)

C^*-algebra の $*$-自己同型写像全体は自然な定義の仕方で位相群をなしている。この位相群の特殊な部分群として2個、それに加えて C^*-algebra の忠実な $*$-表現に関連して定義される部分群4個が考察の対象になっている。
これらの部分群たちに対して、おたがいの包含関係はどうなっているか? それらは位相的に開または閉になっているか? それらは他の正規部分群になっているか? などの問題に解答を与えている。

$\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ を Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の有界線型作用素全体のつくる C^*-algebra とし、$\mathfrak{H}$ 上の恒等作用素を $1_{\mathfrak{H}}$ で表わす。$\mathfrak{A}$ は $1_{\mathfrak{H}}$ を含む $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ の C^*-subalgebra で $\overline{\mathfrak{A}}$ は $\mathfrak{A}$ の weak-operator closure とする。$\mathfrak{A}$ 上の $*$-自己同型写像 Φ に対して、

(1) Φ が $\overline{\mathfrak{A}}$ 上の $*$-自己同型写像に拡張できるとき、Φ は extendable であるという。

(2) $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ のある unitary operator U が存在して $\mathfrak{A}$ 上で $\Phi(T) = UTU^*$ と表わされるとき、Φ は spatial であるという。

(3) $\overline{\mathfrak{A}}$ のある unitary operator U が存在して $\mathfrak{A}$ 上で $\Phi(T) = UTU^*$ と表わされるとき、Φ は weakly-inner であるという。

$\mathfrak{A}$ の $*$-自己同型写像全体を $\Phi(\mathfrak{A})$ で表わす。$\Phi(\mathfrak{A})$ は通常の作用素の積に関して群になっている。この群の単位元は $\mathfrak{A}$ 上の恒等自己同型写像でこれを I で表わすことにする。さらに、$\Phi(\mathfrak{A})$ は metric $\|\Phi_1 - \Phi_2\|$ によって位相群になる。そこで以下 $\Phi(\mathfrak{A})$ を位相群と考える。任意の $\Phi_1, \Phi_2 \in \Phi(\mathfrak{A})$ に対して $\|\Phi_1 - \Phi_2\| \leq 2$、特に任意の $\Phi \in \Phi(\mathfrak{A})$ に対して、$\|\Phi - I\| \leq 2$ となっていることは、つぎの主要結果との関連において注目に値する。(定理の番号は原論文の番号と一致していません)

定理1. $\{\Phi_t\}$ $(-\infty<t<+\infty)$ を $\Phi(\mathfrak{A})$ の連続1径数部分群とすれば、各 Φ_t は weakly-inner である。

定理2. $\|\Phi-I\|<2$ ならば、ある連続1径数部分群 $\{\Phi_t\}$ $(-\infty<t<+\infty)$ で Φ を含むものが存在する。

A を単位元1をもつ C^*-algebra とする。A の $*$-自己同型写像全体を $\alpha(A)$ で表わす。まえと同様にして、$\alpha(A)$ は位相群になる。$\alpha(A)$ の単位元は A 上の恒等自己同型写像であり、これを ι で表わすことにする。いま A から $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ への忠実な $*$-表現 φ が与えられたとする。(つねに $\varphi(1)=1_{\mathfrak{H}}$ と仮定しておく) このとき前との関連で $\varphi(A)=\mathfrak{A}$ とおくことにすれば、A 上の任意の $*$-自己同型写像 α に対して、$\varphi\alpha\varphi^{-1}$ は $\mathfrak{A}$ 上の $*$-自己同型写像になっている。これらのことをもとにして $\alpha(A)$ のいくつかの部分群を定義する。

$\iota_0(A)$: A の内部 $*$-自己同型写像全体。

$\gamma(A)$: $\alpha(A)$ の単位元 ι の連結成分。これは位相群の定理から $\alpha(A)$ の閉正規部分群である。

$\varepsilon_\varphi(A)$: $\varphi\alpha\varphi^{-1}$ が extendable である α の全体。

$\sigma_\varphi(A)$: $\varphi\alpha\varphi^{-1}$ が spatial である α の全体。

$\iota_\varphi(A)$: $\varphi\alpha\varphi^{-1}$ が weakly-inner である α の全体。

$\pi(A)$: 任意の忠実な $*$-表現 φ に対して、$\varphi\alpha\varphi^{-1}$ が weakly-inner である α の全体。このような α は π-inner または permanently weakly inner であるとよばれる。

定理 3. $\{\alpha_t\}$ $(-\infty<t<+\infty)$ を $\alpha(A)$ の連続1径数部分群とすれば、各 α_t は π-inner である。

定理 4. $\|\alpha-\iota\|<2$ ならば、ある連続1径数部分群 $\{\alpha_t\}$ $(-\infty<t<+\infty)$ で α を含むものが存在する。

定理3、定理4はそれぞれ定理1、定理2の言いかえである。これらの定理から次の主要定理が得られる。

定理 5. $\{\alpha : \|\alpha-\iota\|<2\} \subseteq \Upsilon(A) \subseteq \pi(A)$.

以上の諸定理から最初にあげた問題の解答は、それぞれ以下の定理6、定理7、定理8の形で述べられる。

定理6、 $\iota_0(A)$, $\gamma(A) \subseteq \pi(A) \subseteq \iota_\varphi(A) \subseteq \sigma_\varphi(A) \subseteq \varepsilon_\varphi(A) \subseteq \alpha(A)$。

$\iota_0(A)$と$\gamma(A)$の包含関係はさまざまの場合がある。

定理7、 $\gamma(A)$, $\pi(A)$, $\iota_\varphi(A)$, $\sigma_\varphi(A)$, $\varepsilon_\varphi(A)$は$\alpha(A)$の開かつ閉な部分群である。 $\iota_0(A)$についてはさまざまな場合がある。

定理8、 $\iota_0(A) \triangleleft \alpha(A)$, $\gamma(A) \triangleleft \alpha(A)$, $\pi(A) \triangleleft \alpha(A)$, $\iota_\varphi(A) \triangleleft \varepsilon_\varphi(A)$。一方、 $\iota_\varphi(A) \triangleleft \alpha(A)$, $\sigma_\varphi(A) \triangleleft \varepsilon_\varphi(A)$, $\varepsilon_\varphi(A) \triangleleft \alpha(A)$でない例がある。

補、 $\iota_0(A)$の位相的性質およびφとして universal representation を考えた場合の議論が Kadison-Lance-Ringrose "Derivations and Automorphisms of Operator Algebras. II" Journal of Functional Analysis 1, 204-221 (1967) でなされています。またφとして、reduced atomic representation を考えた場合の議論が Lance "Automorphisms of Postliminal C*-algebras" Pacific Journal Math. Vol. 23, No. 3, 1967 でなされています。

§4. 特殊例

ここでは$\alpha(\mathfrak{A})$の部分群の間の包含関係について，いくつかの例を示す.

例1. あるC^*-algebra $\mathfrak{A}$ に対して，二つの忠実$*$表現 φとθが存在し、ある$\alpha\in\alpha(\mathfrak{A})$に対して $\alpha\in I_\varphi(\mathfrak{A})$, $\theta\notin \mathcal{E}_\theta(\mathfrak{A})$ となる。この時 $\mathfrak{J}(\mathfrak{A})\subset\Pi(\mathfrak{A})\subsetneq I_\varphi(\mathfrak{A})$。

$\mathfrak{A}$: the fermion algebra

i.e. $^\exists\{M_n\}$; a family of increasing self-adjoint subalgebras of $\mathfrak{A}$ with same unit and $M_n\cong\{2^n\times 2^n\text{-matrix}\}$.

and $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n =$ a dense subalgebra of $\mathfrak{A}$ $(M_0 = I)$.

M_nの matrix units を次のように選ぶ

$E^n_{j,j}$ $(j=1,\cdots 2^n)$: orthogonal projections, $E^{n\,*}_{j,k} = E^n_{k,j}$

$E^n_{j,j} = E^n_{2j-1,2j-1} + E^n_{2j,2j}$; $E^n_{2j-1,1} = E^{n-1}_{j,1}\cdot E^n_{1,1}$; $E^n_{2j,2} = E^{n-1}_{j,1}\cdot E^n_{2,2}$

この時 $^\exists\alpha\in\alpha(\mathfrak{A})$ $\alpha(E^n_{j,k}) = E^n_{2^n-j+1,\,2^n-k+1}$

又 $U_n \equiv \sum_{j+k=2^n+1} E^n_{j,k} \Rightarrow \alpha(A) = U_n A U_n^* = U_{n+1} A U_{n+1}^*$. $A\in M_n\subset M_{n+1}$

I) φ の構成

$\mathfrak{H} = L^2([0,1], m)$ (m: the Lebegue measure)

$\varphi(E^n_{j,k})$: $(\chi_{S^n_k} f)(t) \to \chi_{S^n_j}(t) f(t - \frac{j-1}{2} + \frac{k-1}{2})$ $f\in\mathfrak{H}$, $S^n_k = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$

$\varphi(E^n_{j,k})$: partial isometry $\chi_{S^n_k}\mathfrak{H} \to \chi_{S^n_j}\mathfrak{H}$

$\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ に拡張でき、忠実な*表現となる。

$M_f \in \varphi(\mathfrak{A})$ for ${}^\forall f \in C([0,1])$, $(M_f(g) = fg \quad g \in \mathfrak{H}) \Rightarrow \varphi(\mathfrak{A})' = \mathbb{C}I$

故に φ;既約 i.e. $\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w = \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$

II) $\alpha \in l_\varphi(\mathfrak{A})$

$\vee\{\chi_{S_j^n} ; n=1,2,\cdots, j=1,\cdots 2^n\}$: dense in $\mathfrak{H}$

$\varphi(U_n)(\chi_{S_j^n}) = \varphi(U_m)(\chi_{S_j^n})$ for $m \geq n$,

$\|\varphi(U_n)\| = 1$, $\varphi(U_n)^2 = I$ for ${}^\forall n$.

$\Rightarrow {}^\exists U \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})^{(u)}$ $\varphi(U_n) \to U$, $U\varphi(E^n_{j,k})U = \varphi(U_n)\varphi(E^n_{j,k})\varphi(U_n)$

故に $\varphi\alpha\varphi^{-1}(A) = UAU$ $A \in \varphi(\mathfrak{A})$

φ;既約 $\Rightarrow U \in \overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w$ $\therefore \alpha \in l_\varphi(\mathfrak{A})$

III) θ の構成

$\mathfrak{H}_0 = L^2([0,1), \mu)$ $\mu(B) \equiv$ the number of dyadic points in B

$\theta(E^n_{j,k}) ; (\chi_{T^n_k} f)(t) \longrightarrow \chi_{T^n_j}(t) f(t - \frac{j-1}{2} + \frac{k-1}{2})$ $f \in \mathfrak{H}_0$, $T^n_k = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$

$\theta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)$ に拡張でき、忠実な*表現になる。

$\{\chi_{\frac{j}{2^n}}(t) ; n=1,2,\cdots, j=1,\cdots 2^n-1\}$; $\mathfrak{H}_0$ の正規直交規底

$P_{\frac{j}{2^n}} = \bigwedge_{m \geq n} \varphi(E^m_{j\cdot 2^{m-n}+1,\, j\cdot 2^{m-n}+1})$ $P_{\frac{j}{2^n}}$; projection on $\chi_{\frac{j}{2^n}}\mathfrak{H}_0$

$E^{\frac{j}{2^n}}_{\frac{k}{2^m}}$; partial isometry $\chi_{\frac{k}{2^m}}\mathfrak{H}_0 \longrightarrow \chi_{\frac{j}{2^n}}\mathfrak{H}_0$

$E^{\frac{j}{2^n}}_{\frac{k}{2^m}} \cdot E^{\frac{j}{2^n}*}_{\frac{k}{2^m}} = P_{\frac{j}{2^n}}$ $E^{\frac{j}{2^n}*}_{\frac{k}{2^m}} \cdot E^{\frac{j}{2^n}}_{\frac{k}{2^m}} = P_{\frac{k}{2^m}}$

$\varphi(E^l_{p,q}) \longrightarrow E^{\frac{j}{2^n}}_{\frac{k}{2^m}}$ (weak) as $l \longrightarrow \infty$ $\left(\begin{array}{ll} p = j\cdot 2^{l-n}+1 & l \geq n \\ q = k\cdot 2^{l-m}+1 & l \geq m \end{array} \right)$

以上より $\overline{\theta(\mathfrak{A})}^w = \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)$ i.e. θ ; 既約

IV) $\alpha \notin \mathcal{E}_\theta(\mathfrak{A})$

$\alpha(E^n_{11}) = E^n_{2^n 2^n}$ $\quad \bigwedge_n \theta(E^n_{11}) = P_0$ $\quad \bigwedge_n \theta(E^n_{2^n 2^n}) = 0$

$\Rightarrow$ $\theta\alpha\theta^{-1}$ は $\overline{\theta(\mathfrak{A})}^w = \mathcal{L}(\mathfrak{H}_0)$ に拡張できない。 i.e. $\alpha \notin \mathcal{E}_\theta(\mathfrak{A})$.

例2 $\ \iota_0(\mathfrak{A}) \subsetneq \pi(\mathfrak{A})$ の例を作る.

$\mathfrak{H}$; separable Hilbert space.

$\mathfrak{A} = V\{I, CC(\mathfrak{H})\} = \{aI + C ; a \in \mathbb{C}, C \in CC(\mathfrak{H})\}$

$\mathfrak{A}$の既約表現は$\mathfrak{A}$を定義したものか、又は1次元表現だけである。他の表現はこれら2つのcopyの直和である。

φ ; $\mathfrak{A}$の忠実表現

$\Rightarrow$ $^\exists Q$; central projection of $\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w$

$\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w(I-Q) = \{\lambda(I-Q)\}$, $\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w Q$; factor of Type I.

$^\forall \alpha \in \mathcal{A}(\varphi(\mathfrak{A}))$ $\ ^\exists \bar{\alpha} \in \mathcal{A}(\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w)$ $\ \bar{\alpha}|_{\varphi(\mathfrak{A})} = \alpha$,

$\bar{\alpha}$; $\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w Q \longrightarrow \overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w Q$ onto, $\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w(I-Q) \longrightarrow \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\bar{\alpha} \in \iota_0(\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w)$ $\quad$ i.e. $\alpha \in \iota_\varphi(\mathfrak{A})$

φ ; 任意 $\Rightarrow$ $\alpha \in \pi(\mathfrak{A})$ $\quad$ i.e. $\mathcal{A}(\mathfrak{A}) = \pi(\mathfrak{A})$.

ここで $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})^{(u)}$, $U \notin \mathfrak{A}$ とする.

$\alpha(A) \equiv UAU^*$ $\quad A \in \mathfrak{A}$ $\Rightarrow \alpha \in \mathcal{A}(\mathfrak{A})$ $\quad \alpha \notin \iota_0(\mathfrak{A})$

[注. この時 $\ \gamma(\mathfrak{A}) = \pi(\mathfrak{A}) = \mathcal{A}(\mathfrak{A}) = \{U \cdot U^* ; U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})^u\}$

$U = \exp iH$, $\quad U_t = \exp itH$, $\quad \alpha_t(\cdot) \equiv U_t \cdot U_t^*$

$\Rightarrow$ $t \to \alpha_t$; norm cont. one-parameter group in $\mathcal{A}(\mathfrak{A})$.

$\therefore \alpha_t \in \mathcal{J}(\mathfrak{A}),\quad \alpha = \alpha_1 \in \mathcal{J}(\mathfrak{A}).$]

例3　ある C^*-algebra で、忠実*表現 ι が存在し、

$\iota_0(\mathfrak{A}) \subsetneq \pi(\mathfrak{A}) \subsetneq \iota_\iota(\mathfrak{A})$ なる例を作る。

$\mathfrak{H}$: separable Hilbert space

$\mathcal{M}$: factor of Type II acting on $\mathfrak{H}$ with coupring 1.

$\mathfrak{A} = \{A + C;\ A \in \mathcal{M},\ C \in CC(\mathfrak{H})\}$: C^* algebra.

$\mathcal{M}$ の仮定より　$\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{M})$. ${}^\exists U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})^{(u)}$ $\alpha(\cdot) = U \cdot U^*$

$\alpha_0(A+C) \equiv U(A+C)U^* \Rightarrow \alpha_0 \in \mathcal{A}(\mathfrak{A})$.

ι; $\mathfrak{A}$ を定義した $\mathfrak{H}$ 上えの表現 $\Rightarrow \alpha \in \iota_\iota(\mathfrak{A})$.

$\mathfrak{A}/CC(\mathfrak{H}) = \mathcal{M} \Rightarrow \psi;\ A + C \to A$. $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上えの*表現

$\varphi = \iota \oplus \psi$: $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ 上えの忠実*表現, $\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w = \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \oplus \mathcal{M}$

$\beta \equiv \varphi \alpha_0 \varphi^{-1}$　$\beta(\{A+C, A\}) = \{\alpha_0(A) + \alpha_0(C), \alpha_0(A)\}$　$A \in \mathcal{M}$, $C \in CC(\mathfrak{H})$.

故に $\alpha \notin \iota_0(\mathcal{M}) \Rightarrow \beta \notin \iota_0(\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w)$　i.e. $\alpha_0 \notin \iota_\varphi(\mathfrak{A})$.

$\therefore \pi(\mathfrak{A}) \subsetneq \iota_\iota(\mathfrak{A})$.

次、$U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})^{(u)} \cap \mathcal{M}'$ $\|U - I\| < 1$, $U \neq \lambda I$. $|\lambda| = 1$.

$\alpha(\cdot) \equiv U \cdot U^*$. $\|\alpha - \iota\| < 2$.

定理5より　$\alpha \in \mathcal{J}(\mathfrak{A}) \subset \pi(\mathfrak{A})$

一方　$\alpha \notin \iota_0(\mathfrak{A})$　　$\therefore \iota_0(\mathfrak{A}) \subsetneq \pi(\mathfrak{A})$.

[注　この時　$\alpha \in \mathcal{A}(\mathfrak{A})$, $\alpha|_{\mathcal{M}} = I_{\mathcal{M}} \Rightarrow \alpha \in \mathcal{J}(\mathfrak{A})$

$\alpha|_{\mathcal{M}} = I_{\mathcal{M}} \Rightarrow {}^\exists U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})^{(u)} \cap \mathcal{M}'$　$\alpha(\cdot) = U \cdot U^*$

$U=\exp iH,\ U_t=\exp itH\quad \alpha_t(\cdot)=U_t\cdot U_t^*$

例3の注と同様にして $\alpha\in\mathcal{J}(\mathfrak{A})$]

例4 $\alpha(\mathfrak{A})$ の部分群 $\mathcal{J}(\mathfrak{A}),\ \mathcal{L}(\mathfrak{A}),\ \pi(\mathfrak{A})$ についてその包含関係をHomotopy Theoryを使って考察する。

$\mathcal{A}=C(X)=\{f: X\to\mathbb{C},\ \text{cont.}\}\quad X:\text{compact } T_2\text{-space}.$

$M_n=\mathcal{L}(\mathfrak{H}_n)=\{n\times n\text{-matrix}\}\quad \mathfrak{H}_n$: n-次元複素Hilbert空間

$\mathfrak{A}=\mathcal{A}\otimes M_n\cong C(X,M_n)=\{f: X\to M_n\ \text{cont.}\}\quad \mathcal{C}=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}'$

$\alpha_c(\mathfrak{A})=\{\alpha\in\alpha(\mathfrak{A});\ \alpha(A)=A,\ \text{for } {}^\forall A\in\mathcal{C}\}.$

I) $\alpha_c(\mathfrak{A})=\pi(\mathfrak{A})$ を示す

$\alpha\in\pi(\mathfrak{A}),\quad \varphi$: $\mathfrak{A}$ の一つの忠実*表現

${}^\exists U\in\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w,\ U:\text{unitary}\quad \varphi\alpha\varphi^{-1}(\cdot)=U\cdot U^*$

$A\in\mathcal{C}\subset\varphi^{-1}(\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w\cap\varphi(\mathfrak{A})')\quad \alpha(A)=\varphi^{-1}(\varphi\alpha\varphi^{-1})(\varphi(A))=A.$

$\therefore\ \alpha\in\alpha_c(\mathfrak{A}).\qquad \pi(\mathfrak{A})\subset\alpha_c(\mathfrak{A}).$

逆に $\alpha\in\alpha_c(\mathfrak{A})$ とする。

$\mathfrak{A}$ の忠実*表現は $\mathcal{A}$ がその上に忠実*表現されているHilbert space $\mathfrak{H}$ の n-直和 $\mathfrak{H}_n$ 上に作用している $\mathcal{A}\otimes M_n$ とunitary同値である事を注意しておく。

$\{E_{j,k};\ j,k=1,2,\cdots,n\}$; matrix units of M_n.

$\alpha(I\otimes E_{j,k})\equiv B_{j,k}$

$\Rightarrow$

$\alpha(\sum_{j,k}A_{j,k}\otimes E_{j,k})=\sum_{j,k}(A_{j,k}\otimes I)B_{j,k}\quad \because\ \alpha(A_{j,k}\otimes I)=A_{j,k}\otimes I$

よって α (α^{-1}も) ; strong operator cont.

$\Rightarrow$ $^\exists\bar{\alpha}\in\alpha(\bar{\mathfrak{A}}^{\omega})$ ($\bar{\mathfrak{A}}^{\omega}=\bar{\mathcal{A}}^{\omega}\otimes M_n$) $\bar{\alpha}|_{\mathfrak{A}}=\alpha$.

$\bar{\alpha}(A\otimes I)=A\otimes I$, $A\in\bar{\mathcal{A}}^{\omega}$, $\bar{\mathfrak{A}}^{\omega\prime}=\mathcal{A}'\otimes I$

$\Rightarrow$ $\bar{\alpha}\in\iota_0(\bar{\mathfrak{A}}^{\omega})$ $\because$) $\bar{\mathfrak{A}}^{\omega}$; Type I v. N.-alg.

$\Rightarrow$ $\alpha\in\pi(\mathfrak{A})$ (上の注意より) $\therefore$ $\alpha_c(\mathfrak{A})\subset\pi(\mathfrak{A})$

II) $\gamma(\mathfrak{A})\subset\iota_0(\mathfrak{A})\subset\pi(\mathfrak{A})$ を示す.

i) $\pi(\mathfrak{A})=\alpha_c(\mathfrak{A})\cong C(X,\alpha(M_n))=\{f : X\to\alpha(M_n) : \text{cont.}\}$

$\because$) $\alpha\in\alpha_c(\mathfrak{A})$, $\rho\in X$, $\varphi_\rho\equiv\rho(A)B$ ($A\in C(X)$, $\rho(A)=A(\rho)$)

$\Rightarrow$ φ_ρ : homomorphism of $\mathcal{A}\otimes M_n$ onto M_n

$B\in M_n$, $\alpha(\rho)(B)\equiv\varphi_\rho(\alpha(I\otimes B))$

$\Rightarrow$ $\alpha(\rho)\in\alpha(M_n)$ $\because$) M_n : 有限次元.

$\rho\mapsto\alpha(\rho) : X\to\alpha(M_n)$: cont. (f_α と書く.)

$f_\alpha\in C(X,\alpha(M_n))$

逆に $f\in C(X,\alpha(M_n))$ $f(\rho)\equiv\alpha_f(\rho)$

$B\in M_n$, $\alpha_f(\rho)B=\sum_{jk}\hat{A}_{jk}(\rho)E_{jk}$

$\Rightarrow$ $\hat{A}_{jk} : \rho\mapsto\hat{A}_{jk}(\rho)$. $X\to\mathbb{C}$ cont. i.e. $\hat{A}_{jk}\in C(X)=\mathcal{A}$.

$\alpha_f(A\otimes B)\equiv\sum_{jk}A\hat{A}_{jk}\otimes E_{jk}$

$\Rightarrow$ $\alpha_f\in\alpha(\mathfrak{A})$, $\alpha_f(A\otimes I)=A\otimes I$, $A\in\mathcal{A}$.

$\Rightarrow$ $\alpha_f\in\alpha_c(\mathfrak{A})$

ii) $U(n)=M_n^{(u)}$ $T_1=\{\lambda I_n, |\lambda|=1\}$; the center of $U(n)$

P : $U(n)\longrightarrow U(n)/T_1$: canonical map homotopy theory から

$U(n)/T_1$: base space, $U(n)$: boundle P : projection

T_1 : fiber and group

と考えられる。

$\alpha(M_n) = l_0(M_n) \cong U(n)/T_1$

$\alpha \in l_0(\mathfrak{A})$. $\exists U_\alpha \in \mathfrak{A}^{(u)}$ $\alpha(\cdot) = U_\alpha \cdot U_\alpha^*$.

$\mathfrak{f}_\alpha(\rho) \equiv \varphi_\rho(U_\alpha) \in U(n)$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{f}_\alpha \in C(X, U(n)) \doteqdot \{f : X \to U(n) : \text{cont.}\}$, $f_\alpha = P\mathfrak{f}_\alpha$

逆に. $\mathfrak{f} \in C(X, U(n)) = C(X, M_n)^{(u)} \cong \mathfrak{A}^{(u)}$

$\Rightarrow$ $f = P\mathfrak{f} \in C(X, U(n)/T_1) = C(X, \alpha(M_n)) \cong \alpha_c(\mathfrak{A})$

$\alpha_f(\cdot) = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f}^*$, $\therefore \alpha_f \in l_0(\mathfrak{A})$

以上から $l_0(\mathfrak{A}) \cong \{f \in C(X, U(n)/T_1), \exists \mathfrak{f} \in C(X, U_n). f = P\mathfrak{f}\}$

iii) $\gamma(\mathfrak{A}) \subset l_0(\mathfrak{A})$ を示す

$\gamma \in \gamma(\mathfrak{A})$

$\Rightarrow$ $\exists \gamma_i(t)$; norm-cont. one-parmeter group in $\alpha(\mathfrak{A})$ $i=1,2\cdots m$.

$\gamma = \gamma_1(1) \cdots \gamma_m(1)$

$\Gamma(\rho, t) \equiv (\gamma_1(t))(\rho) \cdots (\gamma_m(t))(\rho) : X \times [0,1] \to \alpha(M_n) \cong U(n)/T_1$

Γ is a homotopy of γ and constant mapping $X \to T_1$

$\Rightarrow$ $\exists \bar{\Gamma} : X \times [0,1] \to U(n)$. cont. $P\bar{\Gamma} = \Gamma$

$\Rightarrow$ $\gamma = \Gamma(\rho, 1) = P\bar{\Gamma}(\rho, 1)$ $\therefore \gamma \in l_0(\mathfrak{A})$.

III) $\pi(\mathfrak{a})/\gamma(\mathfrak{a}) \cong$ the group of homotopy class of $C(X, U(n)/T_1)$

$\alpha, \beta \in \pi(\mathfrak{a})$, $[\alpha] = [\beta]$ in $\pi(\mathfrak{a})/\gamma(\mathfrak{a})$

$\Rightarrow \exists \gamma \in \gamma(\mathfrak{a})$, $\alpha = \beta\gamma$

$\Gamma(p, t) : X \times [0,1] \to U(n)/T_1$; homotopy of γ and $p \to T_1$

$\beta(p)\Gamma(p, t)$: a homotopy of β and α

逆に $\alpha, \beta \in \pi(\mathfrak{a}) \cong C(X, U(n)/T_1)$. α and β are homotopic

$\Gamma(p, t)$: a homotopy of β and α

$\Rightarrow \beta^{-1}(p)\Gamma(p, t)$: a homotopy of $\beta^{-1}\alpha$ and $p \to T_1$

$\Rightarrow \beta^{-1}\alpha \in \gamma(\mathfrak{a})$ $\quad \therefore [\alpha] = [\beta]$ in $\pi(\mathfrak{a})/\gamma(\mathfrak{a})$.

以上の事から $\gamma(\mathfrak{a})$, $\iota_0(\mathfrak{a})$, $\pi(\mathfrak{a})$ の細い包含関係を X の性質により与える事ができる。

I) X : contractive (例えば X = the unit ball in $\mathbb{C}^n$)

$\Rightarrow$ X の連続写像はすべて恒等写像と homotopic.

$\Rightarrow$ $\pi(\mathfrak{a})/\gamma(\mathfrak{a}) \cong \{0\}$. $\quad \therefore \gamma(\mathfrak{a}) = \iota_0(\mathfrak{a}) = \pi(\mathfrak{a})$.

II) $X = U(n)/T_1 \Rightarrow \gamma(\mathfrak{a}) \subsetneq \iota_0(\mathfrak{a}) \subsetneq \pi(\mathfrak{a})$.

$\because$ $\iota : U(n)/T_1 \to U(n)/T_1$: 恒等写像 $\in C(X, U(n)/T_1) \cong \pi(\mathfrak{a})$

ここで、$\forall f \in C(X, U(n))$, $\iota \neq pf$

$\Rightarrow \iota \notin \iota_0(\mathfrak{a})$, $\quad \therefore \iota_0(\mathfrak{a}) \subsetneq \pi(\mathfrak{a})$

次 $U(n)/T_1 \cong SU(n)/Z_n$, $\quad SU(n) = \{A \in U(n), \det A = 1\}$

$U(n) = T_1 \times SU(n)$

q : $SU(n) \to SU(n)/T_1$ canonical map

i : $SU(n) \to U(n) \cong T_1 \times SU(n)$ $\quad i(U) = (I, U)$

s : $SU(n) \to SU(n)$ $\quad s(U) = U^n$

r $SU(n)/\mathbb{Z}_n \to SU(n)$ $\quad r(U\mathbb{Z}_n) = U^n$ $\quad rq = s$

$t \equiv ir$: $SU(n)/\mathbb{Z}_n \to U(n)$ cont. i.e. $t \in C(X, U(n))$

$$\begin{tikzcd} SU(n)/\mathbb{Z}_n \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "r"'] & U(n) \arrow[r, "p"] & U(n)/T_1 \\ SU(n) \arrow[u, "q"] \arrow[r, "s"'] & SU(n) \arrow[u, "i"'] & \end{tikzcd}$$

$\alpha \equiv pt$: $U(n)/T_1 \longrightarrow U(n)/T_1$ cont. i.e. $\alpha \in C(X, U(n)/T_1)$

α : not essential (i.e. α is not homotopic to constant map)

$\Rightarrow$ $\alpha \not\equiv \gamma(\mathfrak{A})$ 一方 $\alpha \in L_0(\mathfrak{A}) \cong \{\alpha \in C(X, U(n)/T_1, {}^\exists t \in C(X, U(n))$ $\alpha = pt\}$

III) $X = T_1 \Rightarrow \gamma(\mathfrak{A}) \subsetneq L_0(\mathfrak{A}) = \pi(\mathfrak{A})$

$\because$) $\pi(\mathfrak{A})/\gamma(\mathfrak{A}) = \pi_1(SU(n)/\mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n$

($\pi_n(X)$: $[0,1]^n \to X$ cont. の homotopy group)

$\Rightarrow$ ${}^\exists \alpha_0 \in \pi(\mathfrak{A})$. $[\alpha_0] \neq [0]$ $\quad \therefore \alpha_0 \notin \gamma(\mathfrak{A})$ $\quad \therefore \gamma(\mathfrak{A}) \subsetneq \pi(\mathfrak{A})$

一方 ${}^\forall \alpha \in \pi(\mathfrak{A}) \cong C(T_1, U(n)/T_1)$ ${}^\exists \tilde{\alpha} \in C(T_1, U(n))$ $\alpha = p\tilde{\alpha}$.

$\Rightarrow$ $\alpha \in L_0(\mathfrak{A})$ $\quad \therefore L_0(\mathfrak{A}) = \pi(\mathfrak{A})$

IV) $X =$ 2-skelton of a triangulation of P^3

$\Rightarrow$ $\gamma(\mathfrak{A}) = L_0(\mathfrak{A}) \subsetneq \pi(\mathfrak{A})$

V) $X = S^m = \{x \in \mathbb{R}_{m+1}, \|x\| = 1\}$

$\mathfrak{A}_{mn} \equiv C(S^m) \otimes M_n$

$\Rightarrow$ $\pi(\mathfrak{A}_{mn})/\gamma(\mathfrak{A}_{mn}) \simeq \pi_m(U(n)/T_1) = \begin{cases} 0 & m: \text{even} \\ \mathbb{Z} & m: \text{odd} \neq 1 \end{cases}$ $\quad m < 2n$

m; even $< 2n$ の時

$\pi(\mathfrak{a}_{mn})/\gamma(\mathfrak{a}_{mn}) = 0$ $\quad \therefore \gamma(\mathfrak{a}_{mn}) = L_0(\mathfrak{a}_{mn}) = \pi(\mathfrak{a}_{mn})$

m: odd, $\neq 1$ $< 2n$ の時

$\pi(\mathfrak{a}_{mn})/\gamma(\mathfrak{a}_{mn}) = \mathbb{Z}$ $\quad \therefore \gamma(\mathfrak{a}_{mn}) \subsetneqq \pi(\mathfrak{a}_{mn})$

又一般に $L_0(\mathfrak{a}_{mn}) = \pi(\mathfrak{a}_{mn})$ for $m, n = 1, 2, \cdots$,

$\because$)

$m = 1 \Rightarrow X = T_1$ III) の case

$m = 2 \Rightarrow n > 2$ の時上記より明らか. $n=1$ の時 $U(n)/T_1 = 0$

から明らか

$m > 2$ の時 homotopy sequence

$$\cdots \pi_m(T_1) \longrightarrow \pi_m(U(n)) \xrightarrow{P_*} \pi_m(U(n)/T_1) \longrightarrow \pi_{m-1}(T_1) \cdots$$

は exact. $\quad \therefore P_*$; onto isomorphism

$\Rightarrow {}^{\forall}\alpha \in C(\mathfrak{a}_{mn}) \cong C(S^m, U(n)/T_1)$. ${}^{\exists}\bar{\alpha} \in C(S^m, U(n))$

$\alpha = p\bar{\alpha}$ $\quad \therefore \alpha \in L_0(\mathfrak{a}_{mn})$ $\quad \therefore L_0(\mathfrak{a}_{mn}) = \pi(\mathfrak{a}_{mn})$.