数理解析研究所講究録
第 166 巻 1972 年 92-100

ある種の C^*-algebra の automorphism group について

東工大 理　生 西 明 夫

§1　序

ここでは次の論文を紹介します。

Smith, M. B., On automorphism groups of C^*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc 152 (1970), 623-648.

C^*-algebra $C(X)\otimes\mathcal{L}(\mathcal{H})$（$X$ は compact space）の automorphism は Kandison, Ringrose [I, IV. Example d] によって，Hilbert space $\mathcal{H}$ が有限次元の場合が研究されている。Smith のこの論文は，$\mathcal{H}$ が無限次元の場合を扱ったものである。また，Lance [2] が同じ結果を独立に得ています。

主要な結果は次の二つです。

定理 1　　$\text{loc-Inn}(C(X;\mathcal{L}(\mathcal{H})))\cong C(X;\text{Aut}(\mathcal{L}(\mathcal{H})))$

ここで，$\text{Aut}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の *-automorphism の全体で，$\text{loc-Inn}(C(X;\mathcal{L}(\mathcal{H})))$ は次節で定義します。

定理 2　$\mathcal{H}$ が無限次元ならば，

$$loc\text{-}\mathrm{Inn}(\mathfrak{A})/\mathrm{Inn}(\mathfrak{A}) = \check{H}^2(X;\mathbb{Z})$$

ここで，$\mathfrak{A}=C(X;\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, $\mathrm{Inn}(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{A}$ の inner*-automorphism 全体，$\check{H}^2(X;\mathbb{Z})$ は整数環 $\mathbb{Z}$ に係数をもつ X の 2nd Čech cohomology group である。

定理２によって，$\mathcal{H}$ の次元が有限と無限の場合では本質的な違いがあることがわかる。

§ 2.　Locally inner automorphisms.

以後，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{H}$ 上の単位元をもつ C^*-algebra，X は compact space，$\mathfrak{A}=C(X)\otimes\mathcal{B}=C(X;\mathcal{B})$ とする。

$CF(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{A}$ の center-fixing *-automorphisms の group とする（i.e. $\alpha(x)=x \quad (x\in Z(\mathfrak{A}))$）。

また，$e: X\times C(X;\mathcal{B})\to\mathcal{B}$ と $e_t: C(X;\mathcal{B})\to\mathcal{B}$ を次のように定義する。$e(t,f)=f(t)$，$e_t(f)=f(t)$．

e_t について次の有用な補題を得る。

補題 I．　$\alpha\in CF(\mathfrak{A})$ ならば，$\alpha(\ker e_t)\subset\ker e_t$．

S を X の closed set とする。このとき，Tietze の拡張定理によって *-homo $C(X;\mathcal{B})\ni f\to f|_S\in C(S;\mathcal{B})$ は onto である。

このようにして次の定~~理~~義は well-defined である。

定義．　$\alpha\in CF(X;\mathcal{B})$ と X の closed set S に対して，

$$\alpha|_S(f)=\alpha(F)|_S \qquad (f\in S;B))$$

ここで，$f\subset F\in C(X;\mathcal{B})$．明らかに，$\alpha|_S\in CF(C(S;\mathcal{B}))$．

定義. Xの open covering $\{S_1, \cdots S_N\}$ があって，各 $\alpha|_{S_i}$ が inner であるとき，$\alpha \in CF(\mathfrak{A})$ は locally inner であると言い このようなαの全体を loc-Inn$(\mathfrak{A})$ とする。

容易に，loc-Inn$(\mathfrak{A})$は group であって，Inn$(\mathfrak{A})$ はその normal subgroupであることがわかる。

定義. $\alpha \in CF(\mathfrak{A})$と$t \in X$に対して，$\tilde{\alpha}_t ; \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ を $\tilde{\alpha}_t(B) = \alpha(\tilde{B})(t)$。ここで，$\tilde{B}$はBを値にとる定値関数，すなわち，$1 \otimes B$. また$\tilde{\alpha} : t \mapsto \tilde{\alpha}$ とする。

$\alpha, \beta \in CF(\mathfrak{A}), t \in X$ のとき，補題1によって，$\widetilde{\alpha\beta}_t = \tilde{\alpha}_t \tilde{\beta}_t$ であるので $\tilde{\alpha}_t$ は $\mathcal{B}$の*-automorphism である。

定理3. Xを compact space，$\mathcal{H}$をHilbert space，$\mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathfrak{A} = C(X; B)$ とする。このとき，$\alpha \in$ loc-Inn$(\mathfrak{A})$ であるための必要十分条件は $\tilde{\alpha} : X \to Aut(\mathcal{B})$が連続であることである.

定理3を証明するためには，次の二つの補題と，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$の unitary group $\mathcal{U}$が canonical hom. $p : \mathcal{U} \to \mathcal{U}/S^1$ に関して $\mathcal{U}/S^1$上の fibre bundle であることを必要とする。ただし，S^1は$\mathcal{U}$の centerで circle group である。

補題2. $\mathcal{B}$が von Neumann algebra，$\mathcal{U}$を$\mathcal{B}$の unitary group，$Z(\mathcal{U})$を$\mathcal{U}$の centerとする。このとき，canonical isomorphism $\mathcal{U}/Z(\mathcal{U}) \cong Inn(\mathcal{B})$は topological group と

しても isomorphism である。

補題3. X を compact space, $\mathcal{H}$ を Hilbert space, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{H}$ 上の単位元をもつ C^*-algebra, $\mathcal{U}$ を $\mathcal{B}$ の unitary group とする。このとき，$\alpha \in \mathrm{Inn}(\mathfrak{A})$ であるための必要十分条件は，$p\hat{\alpha} = \tilde{\alpha}$ なる continuous map $\hat{\alpha} : X \to \mathcal{U}$ が存在することである ただし，$p : \mathcal{U} \to \mathrm{Inn}(\mathcal{B})$ は canonical hom. である。

定理3の証明. $\alpha|_{\bar{S}}$ が inner ならば，補題3によって，$\widehat{\alpha|_{\bar{S}}} : \bar{S} \to \mathcal{U}$ が存在して，$p\,\widehat{\alpha|_{\bar{S}}} = \widetilde{\alpha|_{\bar{S}}}$. $\widetilde{\alpha|_{\bar{S}}} = \tilde{\alpha}|_{\bar{S}}$ であるので，$\tilde{\alpha}|_S$ は continuous である。このようにして，条件は必要である。逆に，$\tilde{\alpha}$ が continuous としよう。補題2によって $\mathcal{U}/S^1$ と $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ は identify とする。このとき，$\mathcal{U}$ は $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ 上の fibre bundle であるから local cross section をもつ。すなわち，$\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ の open covering $\{\mathcal{O}_\lambda\}$ と連続関数 $s_\lambda : \mathcal{O}_\lambda \to \mathcal{U}$ があって $ps_\lambda = id. : \mathcal{O}_\lambda \to \mathcal{O}_\lambda$.

$\{\tilde{\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)\}$ は X の open covering であるから X の finite open covering $\{S_1, \cdots, S_N\}$ で $\bar{S}_i \subset \tilde{\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)$ なるものがある。$\hat{\alpha}_i = s_{\lambda i}\,\tilde{\alpha}|_{\bar{S}_i}$ とおけば，$\widetilde{\alpha|_{\bar{S}_i}} = p\hat{\alpha}_i$ である。したがって，補題3によって，$\alpha|_{\bar{S}_i}$ は inner である。ゆえに，α は locally inner である。$\square$

定理1の証明. 定理3によって，

$$loc\text{-}\mathrm{Inn}(\mathfrak{A}) \ni \alpha \longmapsto \tilde{\alpha} \in C(X; \mathrm{Aut}(\mathcal{B}))$$

は homomorphism である。これは連続である。

$\varphi \in C(X; Aut(\mathcal{B}))$に対して，$\hat{\varphi}(f)(t) = (\varphi(t))(f(t))$ $(f \in C(X; \mathcal{B}), t \in X)$ とおくと，$\hat{\varphi} \in Aut(\mathfrak{A})$ であって，$\tilde{\hat{\varphi}} = \varphi$ であるから定理3によって，$\hat{\varphi} \in loc\text{-}Inn(\mathfrak{A})$ である。また，$\hat{\tilde{\alpha}} = \alpha$ であるので，$\alpha \longrightarrow \tilde{\alpha}$ は onto isomorphism である。$\varphi \longrightarrow \hat{\varphi}$ は連続である。□

注1．　X が separable で，$\mathcal{B}$ が von Neumann algebra のときには，$CF(\mathfrak{A}) = loc\text{-}Inn(\mathfrak{A})$ である。[3; Theorem 3.1]

注2．　高橋氏[4]は，$C(X; \mathcal{B})$ より一般な locally compact space X 上の C^*-algebra の continuous field $\mathcal{B} = ((\mathcal{B}(t))_{t \in X}, \Theta)$ の場合へ，自然な形で $\alpha|_S$, $\tilde{\alpha}$, locally inner の定義などを拡張している。また，定理1と定理3を X が locally compact space の場合に証明している。ただし，$C(X; Aut(\mathcal{B}))$ のかわりに $C_0(X; Aut(\mathcal{B}))$ と置く。

注3．　定理1は，$\mathcal{B}$ の weak closure が factor である場合には同じ証明によって成り立つことがわかる。また代数的な同型だけならば，$Z(\mathcal{B}) = C1$ なる任意の C^*-algebra に対して成り立つ。

§3．

この節では定理2を証明する．

まず algebraic topology からいくつかの事を引用する。

定理（Kuiper）[3, Theorem G]. $\mathcal{H}$が無限次元のHilbert spaceならば，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$のunitary group $\mathcal{U}$はuniform topologyに関してcontractibleである。

弧状連結位相空間$K(\pi, n)$のhomotopy groupがあるabelian group πに対して，

$$\pi_i(K(\pi, n)) = \pi \quad , i = n$$
$$= 0 \quad , i \neq n$$

なるとき（このとき，$K(\pi, n)$をEilenberg-Maclane spaceと言う），任意のcompact space Xに対して，

$$[X, \ K(\pi, n)] = \check{H}^n(X; \pi),$$

ここで，$[X, K(\pi, n)]$はmap $f: X \to K(\pi, n)$のhomotopy classのset，$\check{H}^n(X; \pi)$はČech cohomologyである。

特に，circle group S^1は$K(\mathbb{Z}, 1)$-spaceである。

~~fible~~ fibre bundle (E, B, F, p)のhomotopy sequence

$$\to \pi_i(F) \xrightarrow{i_n} \pi_i(E) \xrightarrow{p_*} \pi_i(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(F) \to \cdots \xrightarrow{p_*} \pi_0(B)$$

はexactである。

したがって，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$のunitary group $\mathcal{U}$はcontractibleであるから，$\pi_i(\mathcal{U}/S^1) = \pi_{i-1}(S^1) \ (i > 0)$．よって，$\mathcal{U}/S^1$は$K(\mathbb{Z}, 2)$-spaceである。ゆえに，

$$[X; \mathcal{U}/S^1] = \check{H}^2(X; \mathbb{Z}).$$

Covering homotopy theorem :

(E, B, F, p) を fible bundle，X を compact space とする。homotopy $f_t : X \to B$ と map $\tilde{f}_0 : X \to E$ で $p\tilde{f}_0 = f_0$ なるものが与えられているとする。このとき，homotopy $\tilde{f}_t : X \to E$ で $p\tilde{f}_t = f_t$ なるものがある。

定理２の証明．　定理１より，$\text{loc-Inn}(\mathfrak{A}) = C(X; \mathcal{U}/S^1)$．
補題３より，$\text{Inn}(\mathfrak{A}) = p_* C(X; \mathcal{U}) = \{pf \mid f \in C(X; \mathcal{U})\}$ である。
$C_0(X; \mathcal{U}/S^1)$ を null-homotopic map $f : X \longrightarrow \mathcal{U}/S^1$ の全体とする。このとき，Covering homotopy theorem によって，
$C_0(X; \mathcal{U}/S^1) \subset p_* C(X; \mathcal{U})$ である。また，$\mathcal{U}$ は contractible であるから，$p_* C(X; \mathcal{U}) \subset C_0(X; \mathcal{U}/S^1)$ である。ゆえに，

$$\text{loc-Inn}(\mathfrak{A})/\text{Inn}(\mathfrak{A}) = C(X; \mathcal{U}/S^1)/C_0(X; \mathcal{U}/S^1) = [X; \mathcal{U}/S^1]$$
$$= \check{H}^2(X; \mathbb{Z}).$$

E. C. Lance[2] は別の方法で定理２を証明している。また，X が separable の場合に $\pi(\mathfrak{A}) = \text{loc-Inn}(\mathfrak{A})$ であることを示している。したがって，$\text{Inn}(\mathfrak{A}) = C_0(X; \mathcal{U}/S^1)$ が $C(X; \mathcal{U}/S^1)$ の connected component であることと，identity component $\text{Aut}_0(\mathfrak{A})$ が $\pi(\mathfrak{A})$ に含まれることから次の定理を得る。

定理４．　X が separable component space，$\mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$，$\mathcal{H}$ は無限次元，$\mathfrak{A} = C(X; \mathcal{B})$ とする。このとき，

$$\text{Aut}_0(\mathfrak{A}) = \text{Inn}(\mathfrak{A}).$$

それゆえ，$\mathfrak{A}$ の derivation はすべて inner である。

$\mathcal{H}$の次元が有限である場合と無限である場合を比較すると次のようになる。$\mathcal{H}_n$をn次元 Hilbert space, S^mを m-sphere とする。$\mathfrak{A}_{mn} = C(S^m) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ とおく。$1<n<\infty$ のときは, $\text{loc-Inn}(\mathfrak{A}_{2n})/\text{Inn}(\mathfrak{A}_{2n}) = 0$, $\text{loc-Inn}(\mathfrak{A}_{2\infty})/\text{Inn}(\mathfrak{A}_{2\infty}) = \check{H}^2(S^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ である。$m=1,3$ の場合にも $1<n<\infty$ のときは定理2は成り立たない。このように, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$の unitary group が contractible であることは本質的な条件である。

unitary group が contractible であることは, type I_∞ factor 以外にはある種の type II_∞ factor に対して知られている。[5]。また, finite type の factor の unitary group は contractible ではない[6]。

文　献

[1] R. Kadison and J. R. Ringrose, Derivations and antomorphisms of operator algebras, Comm. Math. Phys. 4 (1967), 32-63.

[2] E. C. Lance, Automorphisms of certain operator algebras. Amer. J. Math 91 (1967), 160-174).

[3] M. B. Smith, On automorphism groups of C^*-algebras Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970), 623-648.

[4] S. Takahasi, Anote on automorphisms of C^*-algebras.

[5] M. Brener, A generalization of Kinper's theorem to factor of type II_∞, J. Math. Mech. 16 (1967), 917-925.

[6] H. Araki, M. B. Smith and L. Smith, On the homotopical significance of the type of van Neumann algebra factors, Comm. Math. Phys. 22 (1971) 71-88.