

二次形式の行列式の漸近分布について

統計数理解研 早川 毅

$X_{m \times n}$  ( $m \leq n$ ) の確率密度関数 (p. d. f.) を

$$\pi^{-mn/2} (\det 2\Sigma)^{-n/2} \text{etr}(-\Sigma^{-1}XX'/2)$$

とする.  $M_{m \times n}$  の rank  $\leq m$  とする.  $A_{n \times n} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  
 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$  とする.

$\pi Z = \Sigma^{-1/2}(X-M)A(X-M)'\Sigma^{-1/2}$  の固有根  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$   
の p. d. f. は Mixture 表現として

$$(1) \quad f(\Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_k R_k f_k(\Lambda), \quad \text{for } 0 < g < a_n,$$

ここで

$$f_k(\Lambda) = \left( \pi^{m/2} / \Gamma_m(n/2) \Gamma_m(m/2) \right) (n/2g)^{m/2} \\ \cdot \text{etr}(-n\Lambda/2g) (\det \Lambda)^{(n-m-1)/2} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) \\ \cdot C_k(n\Lambda/2g) / \left( (n/2)_k C_k(I_m) \right),$$

$$(2) \quad R_k = \text{etr}(-\Sigma^{-1}MM'/2) (\det A/g)^{m/2} \\ \cdot (-1)^k P_k(i\Sigma^{-1/2}M(A/g - I)^{-1/2}/\sqrt{2}, I - gA^{-1})$$

であり,  $R_k$ 's は

$R_k > 0$ , with probability 1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_k R_k = 1$$

をみればわかる。

また  $P_k(T, A)$  は

$$\begin{aligned} & \text{etr}(-TT') P_k(T, A) \\ &= (-1)^k \pi^{-m/2} \int_U \text{etr}(-2iTV') \text{etr}(-UU') C_k(UAU') dU \end{aligned}$$

により定義され、

$$P_0(T, A) = -m/2 \cdot \text{tr} A + \text{tr} TAT'$$

$$\begin{aligned} P_2(T, A) = \frac{1}{3} & \left[ \frac{m(m+2)}{4} \{ (\text{tr} A)^2 + 2 \text{tr} A^2 \} \right. \\ & \left. - (m+2) \{ 2 \text{tr} TA^2T' + \text{tr} A \text{tr} TAT' \} \right. \\ & \left. + (\text{tr} TAT')^2 + 2 \text{tr} (TAT')^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4(T, A) = \frac{1}{3} & \left[ \frac{m(m-1)}{2} \{ (\text{tr} A)^2 - \text{tr} A^2 \} \right. \\ & \left. + 2(m-1) \{ \text{tr} TA^2T' - \text{tr} A \text{tr} TAT' \} \right. \\ & \left. + 2 \{ (\text{tr} TAT')^2 - \text{tr} (TAT')^2 \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_k P_k(T, A) = (-1)^k k! & \left[ A_k + \frac{1}{2} \sum_{l_1+l_2=k} A_{l_1} A_{l_2} + \frac{1}{3!} \sum_{l_1+l_2+l_3} A_{l_1} A_{l_2} A_{l_3} \right. \\ & \left. + \dots + A_k^k / k! \right], \end{aligned}$$

ここで

$$A_l = \frac{m}{2l} \text{tr} A^l - \text{tr} TA^l T', \quad l=1, 2, \dots, k$$

$$A_0 \equiv 0$$

である。[1].

さて,  $T^* = T(I + \lambda A)^{-1/2}$ ,  $A^* = (I + \lambda A)^{-1/2} A (I + \lambda A)^{-1/2}$  とし,  
 $\|\lambda A\| < 1$  とすれば,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \frac{\lambda^k}{k!} P_{\kappa}(T, A) = \det(I + \lambda A)^{-m/2} \operatorname{etr} \left\{ T(I - (I + \lambda A)^{-1})T \right\}$$

(=  $d(\lambda, T, A)$  とする.)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} P_{\kappa}(T, A) = d(\lambda, T, A) \times P_{(1)}(T^*, A^*)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} P_{\kappa}(T, A) = d(\lambda, T, A) \lambda^2 \sum_{(2)} P_{\kappa}(T^*, A^*),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \frac{\lambda^k}{(k-3)!} P_{\kappa}(T, A) = d(\lambda, T, A) \lambda^3 \sum_{(3)} P_{\kappa}(T^*, A^*)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \frac{\lambda^k a_1(k)}{k!} P_{\kappa}(T, A) = d(\lambda, T, A) \left[ P_{(2)}(T^*, A^*) - \frac{1}{2} P_{(1)}(T^*, A^*) \right]$$

とす。  $\sum_{(G)} P_{\kappa}(T^*, A^*)$  は  $k=3$  の分割 (3), (21), (1<sup>3</sup>) に対応した  $P_{\kappa}(T^*, A^*)$  についての和を示す。  $a_1(k) = \sum_{\alpha=1}^m k_{\alpha}(k_{\alpha} - \alpha)$ .

$P_{\kappa}(T, I_n) = H_{\kappa}(T)$ ,  $P_{\kappa}(0, A) = (-1)^k \binom{m/2}{\kappa} C_{\kappa}(A)$  であるから,  
 Hermite 多項式  $H_{\kappa}(T)$  (Laguerre 多項式  $L_{\kappa}^{\frac{n}{2} - m/2}(TT)$ ),  
 = 項係数展開の和の式を得る。

また, (2) の関係より,

$$B_1 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} k R_{\kappa} = m \operatorname{tr}(A/\varrho - I) + \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A M' / \varrho$$

$$B_2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} k(k-1) R_{\kappa} = \frac{m^2}{2} \left\{ \operatorname{tr}(A/\varrho - I) \right\}^2 + m \operatorname{tr}(A/\varrho - I)^2$$

$$+ m \operatorname{tr}(A/\varrho - I) \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A M' / \varrho + \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A M' / \varrho \right\}^2$$

$$+ 2 \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \vartheta (A / \vartheta - I) M'$$

$$\begin{aligned} B_3 &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_k k(k-1)(k-2) R_k \\ &= \frac{m^3}{2} \{ \operatorname{tr}(A/\vartheta - I) \}^3 + 3m^2 \operatorname{tr}(A/\vartheta - I) \operatorname{tr}(A/\vartheta - I)^2 + m \operatorname{tr}(A/\vartheta - I)^3 \\ &\quad + \frac{3}{2} \{ m^2 (\operatorname{tr}(A/\vartheta - I))^2 + 2m \operatorname{tr}(A/\vartheta - I) \} \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A M' / \vartheta \\ &\quad + \frac{3}{2} m \operatorname{tr}(A/\vartheta - I) \{ (\operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A M' / \vartheta)^2 + 4 \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \vartheta (A/\vartheta - I) M' \} \\ &\quad + 12 \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \vartheta (A/\vartheta - I)^2 M' + 6 \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \vartheta M' \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \vartheta (A/\vartheta - I) M' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4 &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_k a_1(k) R_k \\ &= m \{ \operatorname{tr}(A/\vartheta - I) \}^2 + m(m+1) \operatorname{tr}(A/\vartheta - I)^2 \\ &\quad + 2(m+1) \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \vartheta (A/\vartheta - I) M' + \operatorname{tr} (\Sigma^{-1} M A / \vartheta M')^2 \\ &\quad + 2 \operatorname{tr}(A/\vartheta - I) \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \vartheta M' \end{aligned}$$

である。

さて (1) を用いて,  $\lambda = \sqrt{n/2m} \log \{ \det(Z/\vartheta) \}$  の特性関数  $\varphi(t)$  は,

$$\varphi(t) = \left(\frac{2}{n}\right)^{itm\sqrt{n/2m}} \frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2} + it\sqrt{n/2m}\right)}{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_k R_k \frac{\left(\frac{n}{2} + it\sqrt{n/2m}\right)_k}{\left(\frac{n}{2}\right)_k}$$

とある。よって Gamma 関数の Stirling の公式より,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp(-t^2/2) \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2mn}} \sum_{\alpha=1}^2 b_{1\alpha}(it)^{2\alpha-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2mn} \sum_{\alpha=1}^3 b_{2\alpha}(it)^{2\alpha} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2mn\sqrt{2mn}} \sum_{\alpha=1}^5 b_{3\alpha}(it)^{2\alpha-1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \end{aligned}$$

であり,

$$l_{11} = mp - B_1, \quad l_{12} = 1/3$$

$$l_{21} = B_2 - mpB_1 + mp(mp+2)/2, \quad l_{22} = (mp+1 - B_1)/3$$

$$l_{23} = 1/18$$

$$(3) \quad l_{31} = m^2(2m^2+3m-1)/6 + mB_4$$

$$l_{32} = mp(mp+2)(mp+4)/6 - mp(mp+2)B_1/2 + mpB_2 - B_3/3$$

$$l_{33} = (5m^2p^2 + 20mp + 12)/30 - (mp+1)B_1/3 + B_3/3$$

$$l_{34} = (mp+2 - B_1)/18, \quad l_{35} = 1/162$$

であり,  $p = (m+1)/2$  とする. 我々はこれらの係数が有限であるため,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr}(A/\varepsilon - I_n) < \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr} \Sigma^{-1} M M' < \infty$  を仮定する必要がある. 以上をまとめて次の定理を得る.

[定理 1]

$X_{m \times n}$  の p.d.f.  $\varepsilon(1)$  とする.  $M_{m \times n} \in \text{rank } m$  の行列と  
し,  $A_{n \times n} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$  とする.

$nZ = \Sigma^{-1/2}(X-M)A(X-M)'\Sigma^{-1/2}$  とするとき,  $\lambda = \sqrt{n/2m} \log\{\det(Z/\varepsilon)\}$  の分布の漸近展開式は,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr}(A/\varepsilon - I) < \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr} \Sigma^{-1} M M' < \infty$  のもとで,

$$(4) \quad P(\lambda \leq x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{2mn}} \sum_{\alpha=1}^2 l_{1\alpha} \Phi^{(2\alpha-1)}(x) + \frac{1}{2mn} \sum_{\alpha=1}^3 l_{2\alpha} \Phi^{(2\alpha)}(x) \\ + \frac{1}{2mn\sqrt{2mn}} \sum_{\alpha=1}^5 l_{3\alpha} \Phi^{(2\alpha-1)}(x) + O(1/n^2)$$

として表現できる.  $l_{i\alpha}$ 's は (3) で与えられる.

(系1) (4)で  $M=0$  とすれば, (4) は [2, (7)] と同じになる.

(系2) (4)で  $g=1, A=I_n$  とすれば, (4) は [3; (3, 16)] と同じになる. 但し前述の導出法は成立していない.

$mnT = \text{tr} \Sigma^{-1}(X-M)A(X-M)'$  の p.d.f. の Mixture 型表現は

$$(5) \left(\frac{mn}{2g}\right)^{m/2} (1/\Gamma(m/2)) \exp(-mnT/2g) T^{m/2-1} \\ \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (mnT/2g)^k / (mn/2)_k \cdot \sum_k R_k, \quad 0 < g < a_n$$

として与えられる. 故に次の定理を得る.

[定理2]

$T$  の p.d.f. が (5) で与えられるとき,  $x = \sqrt{mn/2} \log(T/g)$  の p.d.f. の漸近展開式は,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr}(A/g - I) < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr} \Sigma^{-1} M M' < \infty$  のもとで,

$$(6) f(x) = \phi(x) \left[ 1 + C_1/\sqrt{2mn} + C_2/2mn + C_3/2mn\sqrt{2mn} + O(1/n^2) \right],$$

とあり,

$$\phi(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}.$$

$$C_1 = -\{x^3/3 - xB_1\},$$

$$(7) C_2 = x^6/18 - (1+2B_1)x^4/6 + (B_1+B_2)x^2 - (A_2+1/3),$$

$$C_3 = -\{x^9/162 - (1+B_1)x^7/18 + (2+15B_1+10B_2)x^5/30 \\ - (1+6B_1+21B_2+3B_3)x^3/9 + (B_1+12B_2+3B_3)x/3\}$$

(ii) 如  $\Sigma^{-1}(X-M)A(X-M)' = (Z-\mu)(\Sigma^{-1} \otimes A)(Z-\mu)$  と表現できる.  $Z = [z_1, z_2, \dots, z_m]$ ,  $X = [x_1', x_2', \dots, x_m']'$ ,  $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m]$ ,  $M = [\mu_1', \mu_2', \dots, \mu_m']'$  としていい. このことは, 定理 1 に於て,  $m \rightarrow 1$ ,  $n \rightarrow mn$  ( $B_1, B_2, B_3, B_4$  の中の  $m$  は変え子 1),  $B_4 = 2B_2$  とすれば  $\chi = \sqrt{\frac{mn}{2}} \log(T/\xi)$  の分布関数の漸近展開の式を得ることと示す.

Hill & Davis [4] は Cornish-Fisher type の漸近展開の一般式を得た. その結果を用いければ次の補題を得る.

(補題)

$u$  を標準正規確率変数の  $p$ -th percentile とし,  $\chi$  を  $\chi = \sqrt{m/2} \log(\det(Z/\xi))$  の  $p$ -th percentile とすれば,

$$\chi = u - D_1/\sqrt{2mn} + D_2/2mn - D_3/2mn\sqrt{2mn} + O(1/n^2),$$

ここで

$$D_1 = mp - 1/3 - m \operatorname{tr}(A/\xi - I) - \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A/\xi M' + u^2/3$$

$$D_2 = \{ mp - 4/9 + m \operatorname{tr}(A/\xi - I)^2 + 2 \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A/\xi (A/\xi - I) M' \} u + u^3/9$$

$$D_3 = D_{31} + D_{32} u^2 + D_{33} u^4$$

$$D_{31} = \frac{4m}{9} \operatorname{tr}(A/\xi - I)^3 + m^2 \{ \operatorname{tr}(A/\xi - I) \}^2$$

$$+ m(3m^2 + 3m + 2) \operatorname{tr}(A/\xi - I)^2/3$$

$$+ 2(3m^2 + 3m + 2) \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A/\xi (A/\xi - I) M'/3$$

$$\begin{aligned}
& + 2m \operatorname{tr}(A/\xi - I) \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \xi M' + m \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} M A / \xi M')^2 \\
& + 4 \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \xi (A/\xi - I)^3 M' + m^2(2m^2 + 3m - 1)/6 \\
& - 2mp/3 - 116/405
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{32} &= 2mp/3 - 152/405 - 4m \operatorname{tr}(A/\xi - I)^3/9 - 2m \operatorname{tr}(A/\xi - I)^2/3 \\
& - 4 \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \xi (A/\xi - I) M'/3 - 4 \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \xi (A/\xi - I)^2 M'
\end{aligned}$$

$$D_{33} = 4/135.$$

‡ 是  $y$  を  $\sqrt{mn}/2 \operatorname{tr} \Sigma^{-1}(X-M)A(X-M)'/\xi$  の  $p$ -th percentile とすければ,

$$y = u - \bar{D}_1/\sqrt{2mn} + \bar{D}_2/2mn - \bar{D}_3/2mn\sqrt{2mn} + O(1/n^2).$$

とす,

$$\bar{D}_1 = 2/3 - m \operatorname{tr}(A/\xi - I) - \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \xi M' + u^2/3,$$

$$\begin{aligned}
\bar{D}_2 &= \{ m \operatorname{tr}(A/\xi - I)^2 + 2 \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \xi (A/\xi - I) M' + 5/9 \} u \\
& + u^3/9.
\end{aligned}$$

$$\bar{D}_3 = \bar{D}_{31} + \bar{D}_{32} u^2 + \bar{D}_{33} u^4.$$

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{31} &= -116/405 + 4m \operatorname{tr}(A/\xi - I)^3/9 + m \{ \operatorname{tr}(A/\xi - I) \}^2 \\
& + \frac{m(3m+5)}{3} \operatorname{tr}(A/\xi - I)^2 \\
& + \frac{2}{3}(3m+5) \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \xi (A/\xi - I) M' \\
& + 2 \operatorname{tr}(A/\xi - I) \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \xi M' + \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} M A / \xi M')^2 \\
& + 4 \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \xi (A/\xi - I)^2 M'.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{32} &= 118/405 - 4m \operatorname{tr}(A/\xi - I)^3/9 - 2m \operatorname{tr}(A/\xi - I)^2/3 \\
& - 4 \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \xi (A/\xi - I) M'/3 - 4 \operatorname{tr} \Sigma^{-1} M A / \xi (A/\xi - I)^2 M'.
\end{aligned}$$



$$\bar{D}_{33} = 4/135.$$

以上の結果を複素数正規分布にもとづく二次形式の場合にも平行的に議論できる。詳しくは [5] を参照されたい。

[1] Hayakawa, T. (1972) On the distribution of the multivariate quadratic form in multivariate normal samples. To appear in Ann. Inst. Statist. Math.

[2] Hayakawa, T. (1972). Note on the asymptotic distributions of the functions of an multivariate quadratic form in normal sample. To appear in Ann. Inst. Statist. Math.

[3] Fujikosi, Y. (1968). Asymptotic expansion of the distribution of the generalized variance in the non-central case. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A.1. 32. 293-299.

[4] Hill, G. W. and Davis, A. W. (1968). Generalized asymptotic expansions of Cornish - Fisher type. Ann. Math. Statist. 39. 1264-1273.

[5] Hayakawa, T. (1972). Further contribution to the asymptotic distribution of the determinant of the non-central multivariate quadratic form.

Research Memorandum No 48. Inst. Statist. Math.