

強制 Burgers 乱流のモンテカルロ計算

航 技 研 山本 穉 義
 中村 孝
岩手大. 工 細川 巖

§1. はじめに

乱流における速度場の偶然な揺動は、流れの流体力学的不安定性と速度場の強い非線型な相互作用のため、その中に必然的に含まれている未知の擾乱が大きく励起された結果と考えられている。しかし、現実の流れの中ではこのような擾乱についての正確な情報を得る事は一般に困難であるから、乱流を理論的に解析する時は何らかの方法によってそれに代る偶然な要素を含める事が必要となる。したがってこれまでは、問題の初期条件あるいは境界条件の中に偶然性を含めて、それ以外は決定論的に力学方程式を解くという解法が一般的に行われて来た。しかし、現実の流れの中では各瞬間に擾乱が加えられる場合が多い。例えば、風洞実験等における主流の乱れや物体壁の粗さは局所的な擾乱の原因となり、流体の揺動は Navier - Stokes 方程式に偶然な外力項を加える

事によって記述される。^{1), 2), 3)} またこれ以外にも現実の流れには外部から偶然的な外乱が加えられる機会が多いが、この種の偶然的な外力の下での乱流理論は既に Edwards⁴⁾, Novikov⁵⁾, 細川⁶⁾等によって報告されている。Edwardsは速度場 u の確率分布関数が偶然外力の汎関数となる Liouville 方程式を導いた。Novikov は偶然外力が特別な Gauss 型の場合、 u についての特性汎関数方程式が Hopf 方程式から Novikov 方程式へと拡張される事を示した。さらに細川は偶然外力がより一般的な場合について理論を拡張し、基礎となる特性汎関数方程式の厳密解が汎関数積分によって与えられる事を導いた。ここではこの細川の解の汎関数積分を cylindrical functional approach によってモンテカルロ法⁷⁾で計算する方法を述べると共に、特別な Burgers モデルに応用した数値解について報告する。

流れに偶然的な外力が作用している場合の問題は乱流の発生の過程や定常乱流の形成等に関して、乱流の構造の理解に基礎的な資料を与えてくれる。すなわち、外力が比較的小さい場合は、それが流体の中で微小擾乱の役割を果たし、その下で力学方程式を解けば、乱流の発生の過程が記述出来ると考えられる。また、比較的大きな外力の場合にはそれが流れに対する一つのエネルギー源となり、粘性によるエネルギー

の散逸と均合った時、定常なエネルギースペクトルの形成が期待される。さらに理論的には ω についての特性関数方程式が Hopf 方程式から Novikov 方程式へと構造変化をする興味がある。³⁾ この事は後に述べる様に、速度空間上の特性関数方程式の特性曲線(乱流の初期のアンサンブルの各々を初期条件とする Navier-Stokes 方程式の解)が Hopf 方程式の場合の単なる曲線から確率論的な広がりを持つてくる事を意味する。そしてこの広がりや分散が偶然外力の分散になっていることがわかる。したがって、乱流の発展の過程そのものが(マルコフ的な)確率過程として記述される。

以下においては、§2 で Novikov 方程式の一般的なモンテカルロ法を述べ、§3 では Burgers モデルに適用して得られた計算結果について述べる。

§2. Novikov 方程式のモンテカルロ計算法

ここでは以下で取扱う方程式が一次元の Burgers モデルであるので、全ての式を一次元的に記述する。Novikov によれば⁵⁾、流れに偶然外力が作用している時の速度のフーリエ成分 u についての特性関数方程式は

$$\frac{\partial \phi(y, t)}{\partial t} = i \int dk y(k) Q \left[\frac{\delta}{i \delta y} \right] \phi - \frac{1}{2} \int dk B(k) y^2(k) \cdot \phi$$

$$\equiv \mathcal{L}_e[\phi] \quad (2.1)$$

である。ここで $Q[u]$ は速度場を支配する方程式のオペレーター（一般的にはフーリエ変換された Navier-Stokes オペレーター）で、右辺の第2項が偶然外力の効果を表わし、この項がない式は Hopf 方程式である。^{(1),(2)} 本来、 $\gamma(k)$ は複素数であるが、ここでは特に物理空間を $(0, \infty)$ 区間とし、(§3 で見るような) sine 変換を考え、実数として取扱うことにする。（この時 $B(k)$ は外力の相関 $F(x, x')$ と次のように関係する。

$$F(x, x') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(k) \sin kx \sin kx' dk$$

(2.1) 式の右辺 $\mathcal{L}_e[\phi]$ は ϕ について線型であるので、解を

$$\phi(y, t) = \int K(y, t / y', t') \phi(y', t') \delta y' \quad (2.2)$$

の形で求めると、積分核 K もまた

$$\frac{\partial K(y, t / y', t')}{\partial t} = \mathcal{L}_e[K] \quad (2.3)$$

に従う。この時 K については

$$K(y, t / y', t') = \int K(y, t / y'', t'') K(y'', t'' / y', t') \delta y'' \quad (2.4)$$

$$K(y, t / y', t) = \delta(y - y') \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} K_{\Delta t}(y / y') &\equiv K(y, t + \Delta t / y', t) \\ &= \delta(y - y') + \Delta t \mathcal{L}_e[\delta(y - y')] + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

$$= \int \exp \left\{ i \int dk u(k) (y(k) - y'(k)) + \Delta t \int dk y(k) Q[u] - \frac{\Delta t}{2} \int dk B(k) y^2(k) \right\} \delta u + O(\Delta t^2) \quad (2.6)$$

という性質がある。⁶⁾ ここで $\delta(y - y')$ は

$$\delta(y - y') = \int \exp \left\{ i \int dk u(k) (y(k) - y'(k)) \right\} \delta u \quad (2.7)$$

と定義される。したがって、任意の時刻 t の積分核 K は (t を Δt で M 等分して $\Delta t = t/M$ を無視すれば) (2.6) より

$$\begin{aligned} K(y, t / y^0, t^0 = 0) &= \int \cdots \int \prod_{j=1}^M K_{\Delta t} (y^j / y^{j-1}) \prod_{j=1}^{M-1} \delta y^j \\ &= \int \cdots \int \prod_{j=1}^M \left[\exp \left\{ i \int dk y^j (u^j + \Delta t Q[u^j]) - i \int dk u^j y^{j-1} - \frac{\Delta t}{2} \int dk B(k) (y^j)^2 \right\} \right] \prod_{j=1}^M \delta u^j \prod_{j=1}^{M-1} \delta y^j \end{aligned} \quad (2.8)$$

で求められる。ここで $y^M = y(t)$, $u^j + \Delta t Q[u^j]$ は $Q[u]$ の定義から偶然外力がない場合の時刻 $(j+1)\Delta t$ の速度場を与える。さらに具体的な計算に移るために、(2.8) に含まれる k についての積分を

$$\int dk \approx \Delta k \sum_n \quad (2.9)$$

と変換すれば

$$\begin{aligned} K(y, t / y^0, 0) &= \int \cdots \int \exp \left\{ i \Delta k \sum_n y_n^M (u_n^M + \Delta t Q_n[u_n^M]) - \frac{\Delta t}{2} \Delta k \sum_n B_n (y_n^M)^2 \right\} \prod_{j=1}^{M-1} \left[\exp \left\{ i \Delta k \sum_n (y_n^j (u_n^j + \Delta t Q_n[u_n^j]) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Delta k y_n^{j-1} - \frac{\Delta t}{2} \Delta k B_n (y_n^j)^2 \right\} \right] \prod_{j=1}^M \delta u_n^j \prod_{j=1}^{M-1} \delta y_n^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -u_n^{j+1}] - \frac{\Delta t}{2} \Delta k \sum_n B_n (y_n^j) \}] \exp \left\{ -i \Delta k \sum_n y_n^0 u_n^j \right\} \\
 & \quad \times \prod_{j=1}^{M-1} \delta y_n^j \prod_{j=1}^M \delta u_n^j \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

が得られる。($\Delta k = \pi/L$, この時物理空間 $(0, \infty)$ は $(0, L)$ に
 変る。) ここで関数空間の体積要素 δy は (2.9) に対応して

$$\delta y = \prod_n \left(\frac{dy_n}{\sqrt{2\pi/\Delta k}} \right) \quad (2.11)$$

である。⁸⁾ (2.10) の中で y_n に関する積分は

$$\begin{aligned}
 & \int \cdots \int \exp \left\{ i \Delta k \sum_n (y_n^j [u_n^j + \Delta t Q_n[u^j]] - u_n^{j+1}) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\Delta t}{2} \Delta k \sum_n B_n (y_n^j)^2 \right\} \prod_n \left(\frac{dy_n^j}{\sqrt{2\pi/\Delta k}} \right) \\
 & = \prod_n (\Delta t B_n)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\Delta k}{2\Delta t B_n} (u_n^j + \Delta t Q_n[u^j]] - u_n^{j+1})^2 \right\} \\
 & \equiv \prod_n \theta_n^j (B_n, u_n^j) \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

となるから (2.10) は

$$\begin{aligned}
 K(y, t / y^0, 0) & = \int \cdots \int \exp \left\{ i \Delta k \sum_n y_n^M (u_n^M + \Delta t Q_n[u^M]) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\Delta t}{2} \Delta k \sum_n B_n (y_n^M)^2 - i \Delta k \sum_n y_n^0 u_n^j \right\} \\
 & \quad \times \prod_{j=1}^{M-1} \prod_n \left[\theta_n^j \frac{du_n^j}{\sqrt{2\pi/\Delta k}} \right] \cdot \delta u^M \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

となる。上式のように積分核 K が得られると、任意の時刻の
 特性汎関数 $\phi(y, t)$ は (2.2) より

$$\phi(y, t) = \int K(y, t / y^0, 0) \phi(y^0, 0) \delta y^0 \quad (2.14)$$

で求められる。ここで $\phi(y^0, 0)$ は初期の流れを記述する特性関数である。

Hopf によれば⁷⁾、乱流の全ての速度相関量はその時刻の特性関数によつて与えられる。したがつて、乱流の問題は $\phi(y^0, 0)$ が与えられた時の(2.14)の計算に帰着するが、初期の流れの状態として §3. で述べるように乱れのない状態を選べば、 $\phi(y^0, 0)$ は

$$\phi(y^0, 0) = \exp \left\{ i \sum_n \Delta k y_n^0 \bar{u}_n \right\} \quad (2.15)$$

となり、(2.13)、(2.14)から

$$\begin{aligned} \phi(y, t) = & \int \dots \int \exp \left\{ i \Delta k \sum_n y_n^M (u_n^M + \Delta k Q_n[u^M]) \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{2} \Delta k \sum_n B_n (y^M)^2 \right\} \pi \left[\delta(u_n^M - \bar{u}_n) \right] \\ & \times \prod_{j=1}^{M-1} \prod_n \left[\theta_n^j \cdot \frac{d u_n^j}{\sqrt{2\pi/\Delta k}} \right] \prod_n \frac{d u_n^M}{\sqrt{2\pi/\Delta k}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

が得られる。ここで \bar{u}_n は初期の速度を表わす。(2.16)の y_n^M を含む項は相関量を計算する時の関数微分操作⁸⁾によつて実際の計算には現われてはこないが、その他の計算には高度の多重積分が含まれる。このためここでは文献8)で用いら

れたモンテカルロ求積法によって積分を近似計算する。

(2.16) に含まれる θ_n^i は速度場の成分 u_n の時間的发展を確率論的に記述し, (2.12) の定義からわかるように, $j\Delta t$ 時刻の u_n^i が与えられた時 u_n^{j+1} は $u_n^j + \Delta t Q_n(u^j)$ を平均値, $\sqrt{\Delta t B_n / \Delta k}$ を分散とする正規分布に分布する事を意味している。したがって, 乱流のアンサンブルの各要素の時間的経路は Navier-Stokes 方程式の解に厳密に従うのではなくて, そのまわりに分散する。そして B_n を零に漸近させると θ_n^i は δ 関数に漸近するため, u_n^{j+1} は $u_n^j + \Delta t Q_n(u^j)$ に漸近し, (2.16) は Hopf 方程式の解に漸近する。この事は Novikov 方程式が特別な $B_n = 0$ として Hopf 方程式を包含している事に対応している。

乱流についての数値計算は次の様に行なわれる。まず, 初期の流れを記述するアンサンブル $\{u_n\}$ が与えられた時 (ここでは乱れのない場合 ^(2.15) を選んだが, 一般的には乱れが有つてもよい。) $u_n(t)$ を Δt ステップ毎に計算していく。その時波数空間上の各格子点 (n, j) にあらかじめ正規乱数 $R_n(0, 1)$ を対応させておき u_n^{j+1} を

$$u_n^{j+1} = u_n^j + \Delta t Q_n(u^j) - \sqrt{\Delta t B_n / \Delta k} R_n \quad (2.17)$$

で求めていく。この操作を繰返してそのアンサンブル平均を

とれば, 求める相関量が得られる。このモンテカルロ計算法は前に筆者等が用いた方法と同様である。^{8), 9)}

§ 3. Burgers モデルの数値解と検討

ここで取扱われる Burgers モデルは次の式である。

$$b \frac{dU}{dt} = P - \frac{\nu U}{b} - \frac{1}{b} \int_0^b v^2 dx \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{U}{b} v + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.2)$$

これらの式は channel flow をモデル化したものとして Burgers によって提案されたもので,¹⁰⁾ U は主流, v は乱れの成分を表わす*。(3.1), (3.2) を無次元化すると

$$\frac{dU}{dt} = P - \frac{U}{R} - \int_0^1 v^2 dx \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Uv + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.4)$$

である。ここで $R = U_0 b / \nu$, $U_0 = U(t=0)$, $p = P / U_0^2$ で U / U_0 をあらためて U とおいた。

* 乱流モデルとして普通用いられるものは(3.2)の右辺の第一項がない式であるが, ここでは主流との干渉および臨界レイノルズ数 R_{cr} を導入するためこれ等の式をえらんだ。

われわれは流れに偶然外力が作用している場合を考えるのであるから、運動方程式としては上式の右辺に偶然外力項を加えた式を考えている。しかしここでは乱れの性質を調べる事に主眼をおいて、(3.3) 式は (3.4) の運動を記述するための補足的な式だと考える。したがって、§2.における $u(x,t)$ ^{では} $v(x,t)$ だと考え (3.4) の右辺に偶然外力項を加え、運動方程式としては (3.3), (3.4) の二つを連立して解くものとする。(3.3), (3.4) は数値的に解かれるが、その前に問題の初期条件、境界条件を次のように選ぶ。

1) 初期条件

$$U(t=0) = 1 \quad (3.5)$$

$$v(x, t=0) = 0$$

すなわち、初期には乱れは存在しない。

2) 境界条件

流れの領域は x の $[0, 1]$ 区間であるが (この時 (2.9) の Δk は π である。) 境界条件を

$$v(0, t) = v(1, t) = 0 \quad (3.6)$$

とする。したがって $v(x, t)$ は Sine 級数展開した形で表わしてよいが、§2.における計算過程においては $u(x, t)$ として

$$u(x, t) = \sqrt{2\pi} \sum_n u_n(t) \sin n\pi x \quad (3.7)$$

の形の展開になる。しかしここでは計算の便宜上 Sine 級
 数を正規化した

$$v(x, t) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^N v_n(t) \sin n\pi x \quad (3.8)$$

を選ぶ。(数値計算は $N=20$ で行う。) この結果, (2.17)

$$v_n^{j+1} = v_n^j + \Delta t Q_n(v^j) - \sqrt{\Delta t B_n} R_n \quad (3.9)$$

となり Δk が消去された形になる。ここで $Q_n(v)$ は次の
 2つの連立方程式で表現される。

$$\frac{dU}{dt} = p - \frac{U}{R} - \sum_{n=1}^N v_n^2 \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_n}{dt} = & \left(U - \frac{n^2 \pi^2}{R} \right) v_n - \frac{n\pi}{\sqrt{2}} \left\{ \sum_{n'=1}^{n-1} v_n' v_{n-n'} \right. \\ & \left. - 2 \sum_{n'=1}^{N-n} v_n' v_{n+n'} \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

(3.10), (3.11) の右辺を改めて $V(v_n, U)$, $Q_n(v_n, U)$ と書
 くともンテカルロ計算は(2.17)の代りに

$$U_n^{j+1} = U_n^j + \Delta t V(v_n^j, U^j) \quad (3.10')$$

$$v_n^{j+1} = v_n^j + \Delta t Q_n(v^j, U^j) - \sqrt{\Delta t B_n} R_n \quad (3.11')$$

を解いていく事になる。

次に (3.11)' に含まれる偶然外力のスペクトル B_n を次のよ
 うに選ぶ。

$$(I) \quad B_1 = B_2 = B = 0.01$$

$$B_n = 0 \quad (n=3, 4, \dots, N) \quad (3.12)$$

$$(II) \quad B_n = B = 0.01 \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (3.13)$$

以後は (I) の場合を赤色ノイズ, (II) の場合を白色ノイズと呼ぶ。この結果, 偶然外力の相関 $F(x, x')$ はそれぞれ

$$(I) \quad F(x, x') = 2B \sum_{n=1}^N \sin n\pi x \sin n\pi x' \quad (3.14)$$

$$(II) \quad F(x, x') = B \delta(x - x') \quad (3.15)$$

である。0.01 は初期の流れ $U=1$ に比べて比較的小さい値として選んだ。すなわち単位時間に偶然外力の仕事として流れに加えられる全エネルギーは*

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N B_n \quad (3.16)$$

となるが, $N=20$ とすれば赤色ノイズでは 0.01, 白色ノイズでは 0.1 となる。

次に, 方程式 (3.10), (3.11) について線型安定理論の考察をすれば, 臨界レイノルズ数 R_{cr} は π^2 である。したがってパラメータ R は 10, 100 を選ぶ。さらに白色ノイズの場合には $R=1$ の結果も加えて比較する。また, 乱れが十分小

* 赤色ノイズの場合には空間的に一定ではなくて, その密度分布は $\sum_{n=1}^N B_n \sin^2 n\pi x$ である。

さい時(3.10)には $U=Rp$ という定常解がある。この事を考慮して p としては

$$p = U_0/R = 1/R \quad (3.17)$$

と選ぶ。

以上のように境界条件やいろいろなパラメータを設定して数値計算に移るが、乱流のモンテカルロ計算に入る前に方程式(3.10), (3.11)の性質を簡単に調べてみる。第1図, 第2図, 第3図に $U=1$, $v_n=0.01$ ($n=1, 2, \dots, 20$)を初期条件とする初期値問題の計算結果を示す。線型理論^{安定}の考察からわかる通り $R=1, 9$ (第1図)では全ての波数が安定で減衰を示す。一方 $R=10$ (第2図)では $n=1$ が不安定領域に入り、 $t=0$ から成長を始める。 $n \geq 2$ の成分はいぜんとして減衰を示すが、 t が大きくなると非線型項の影響のため $n=2$ の成分から成長を始める。 $R=100$ (第3図)では $n \leq 3$ が不安定領域で $n \geq 4$ が安定領域に属する。しかし、図に見る通り非線型項の影響が非常に強くなって、 $n=4, 5$ の成分も早くから成長する。一方、 t が大きくなると乱流のエネルギーの増加と共にその影響が主流 U にも反映して、 U の減少が見られる。

次に乱流のモンテカルロ計算に移る。まず、偶然外力が赤色ノイズ(3.12)の場合のエネルギースペクトルの計算結果を

第4図, 第5図に示す。横軸は $k = n\pi$ の代りに n でプロットしてある。図からわかる通り, $R=10$ (第4図) では非線型項の影響が比較的小さいので, スペクトルは釣鐘型を呈すが, $R=100$ (第5図) では Burgers 乱流特有の k^{-2} スペクトルが現われてくる。このように, 臨界レイノルズ数前後のスペクトルの相違は顕著と云えよう。また両方共 ϵ が 2 以上でスペクトルはあまり変化がなくなり, ほぼ定常なスペクトルが形成されたと見て良い。この事をもう少し詳細に検討するために, (3.10) (3.11) からエネルギーの式を作り, 偶然外力からのエネルギー流入 (3.16) を考慮すれば

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (U^2 + \sum_{n=1}^N \langle v_n^2 \rangle) = \frac{1}{R} (U - U^2 - \pi^2 \sum_{n=1}^N n^2 \langle v_n^2 \rangle) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N B_n \quad (3.18)$$

が得られる。しかし, ここでは微小時間 Δt を有限として差分計算をするので ($\Delta t = 0.004$), (3.18) の代りに (3.10), (3.11) から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} [U^2 + \sum_{n=1}^N \langle v_n^2 \rangle]_t^{t+\Delta t} &= \frac{1}{R} (U - U^2 - \pi^2 \sum_{n=1}^N n^2 \langle v_n^2 \rangle) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N B_n + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

とする方が妥当である。ここで $[\quad]_t^{t+\Delta t}$ は時刻 $t+\Delta t$ と t との差を表わし, $O(\Delta t)$ は近似計算のため生じてくる項であ

つて, (3.10), (3.11) から $O(\Delta t) = \frac{1}{2} \Delta t \langle (V^2 + Q_n^2) \rangle$ である。
 。結局流れの全エネルギーについては (3.19) が成立し, この
 式の右辺が零となる時定常状態が実現している。そして, 左
 辺の第2項が乱れの全エネルギーの増加率を表わし, 第6図
 にこれを各時刻に計算した結果を示す。図からわかる様に
 $t=2 \sim 3$ でほぼ零に近づいて, 定常乱流が実現していると
 考えられる。たゞ, その過程においては $R=100$ で t が 1 の
 近くでピークが存在するのに対して $R=10$ では単調に減少し
 ている。これは, $R=100$ では t が小さい時主流のエネルギー
 をくつて急速に乱流が成長し, 一時的に粘性による散逸を圧
 倒するためと考えられる。第7図に乱れの全エネルギーの発
 達を示す。実線は外力によってその時刻までに加えられた全
 エネルギーで, 図からわかるように, $R=100$ で乱れのエネ
 ルギーが実線より大きくなるのは主流との干渉の大きさを示
 している。しかし, いずれの場合も $t \approx 2$ でほぼ一定値に近
 づく傾向を示す。第8図に主流の時間的変化を示す。第7
 図からわかるように, $R=100$ は乱れが大きいため $R=10$ に比
 べてその減少は大きい。次にこれまで計算された波数成分を
 (3.8) 式から $v(x, t)$ に変換した結果について調べる。第9
 図に $\langle v^2(x, t) \rangle$ の分布の結果を示す。 $R=100$ の場合に x の
 両端で中央より大きくなるのは Burgers 乱流特有の鋸歯状

波の形成のためである。第10, 第11図に速度の相関々数 $\langle v(0.5)v(x) \rangle / (\langle v^2(0.5) \rangle \langle v^2(x) \rangle)^{1/2}$ の計算結果を示す。実線は偶然外力の相関々数, すなわち (3.14) から $\sin \pi x / (\sin^2 \pi x + \sin^2 2\pi x)^{1/2}$ である。これが零に近いほど速度相関々数はこれに近いことは当然である。第12図, 第13図に歪度因子と扁平度因子の計算結果を示す。いずれも Burgers 乱流特有の鋸歯状波の形成により Gauss 型の分布からずれている。

これまででは偶然外力のスペクトルが赤色ノイズの場合に発する乱れの計算であったが, 次に白色ノイズ (3.13) の場合に移る。第14図, 第15図, 第16図に $R = 1, 10, 100$ のエネルギー・スペクトルを示す。これらの場合は $n = 20$ までの全ての波数に外部からエネルギーが流入するので, R が小さくても第4図のように釣鐘型にならない。そして, これらの結果は $R = 1, 10, 100$ の3図ともほぼ k^{-2} スペクトル (実線) に漸近している。($n = 20$ の近傍で急に大きくなっているのは数値計算のため波数を $n = 20$ で打切ったためである。) しかし臨界レイノルズ数に達する以前のもの ($R = 1$) と, それを越えたもの ($R = 100$) では, 明らかに k^{-2} スペクトルの発生する機構は違っているはずである。次にこれを考察しよう。

$R = 1$ の場合はその非線型な効果は十分小さくて, 各波数成分間の干渉はないと見て良い。したがって, 各成分は独立に粘

性項の影響だけを受けていると考えられる。この時定常なスペクトルが形成されているとすれば、外部から流入するエネルギーと粘性による散逸は完全に均合しているはずである。微小時間 Δt の間で各成分の粘性によるエネルギーの散逸量は $\pi^2 n^2 \langle v_n^2 \rangle / R$ となり、一方偶然外力によるエネルギー流入は $\frac{1}{2} B_n$ である。したがって、その均合を考えたエネルギースペクトルは

$$E_n = \frac{R}{4\pi^2} B_n n^{-2} \quad (3.20)$$

が得られる。第14, 15, 16図の中の実線は(3.20)を表わす。 $R=1$ はもとより $R=10$ でも定常なスペクトルが(3.20)に近いのは、各成分に加えられるエネルギーが非線型項による輸送に比べて大きいためであると考えられる。 $R=100$ においては赤色ノイズの所で見たように非線型効果は強くて(3.20)は成立し得ず、Burgers乱流特有のメカニズムから n^{-2} スペクトルが形成されたと考えられる。そしてこの場合は(3.20)で予測されるものよりエネルギーレベルは約2倍高い。

次に第6図で見たと同じエネルギーの増加率を第17図に示す。第6図に比べて $R=10$ が $R=100$ より定常への緩和が早いのは同様である。第6図では $t=1$ の近傍にピークがあったが、現在の場合には既に $t=0$ 直後に達し、 $t=1$ を越え

るまで 0.02 以上の高いエネルギー増加率を維持し続ける。第 18 図に乱れの全エネルギーの時間的发展を示す。実線は第 9 図と同様に偶然外力によつてその時刻までに加えられた全エネルギーである。現在の場合には加えられる全エネルギーが主流からのエネルギーに比べて十分大きいので、 $R=100$ の結果も実線の下にくる。第 19 図は主流 U の変化である。第 8 図に比べてその変化が大きいのは含まれる乱れのエネルギーが大きいためである。

次に前と同様に (3.8) によつて物理空間に変換した $v(x,t)$ について調べる。第 20 図は $\langle v^2(x,t) \rangle$ の分布で、傾向は第 9 図と同様であるが、その絶体量はやつ大きい。第 21 図、第 22 図に速度の相関々数を示す。白色ノイズの場合には初期の相関々数は (3.15) から関数に近いと期待できるが、図に示される様に $R=10$ の場合が $R=100$ に比べてその相関の広がりの方が早いことがわかる。特に注目すべきことは、 $R=100$ の場合に $\tau=2$ で相関々数の形が赤色ノイズ、白色ノイズともほぼ共通の曲線で与えられることである。これらは $\tau=2$ でほぼ達成される定常乱流の構造が、外力のノイズの型にあまり敏感でない事を示している。第 23 図、第 24 図に白色ノイズの場合の歪度因子と扁平度因子を示す。その傾向は赤色ノイズの場合(第 12 図、第 13 図)と同様である。そして両

オとも、扁平度因子が3よりかなりずれている事は興味がある。すなわちこのような問題では、準正規分布の仮定が適用不可能である事を示している。

これまで述べて来た^(様な)偶然外力場の下での Burgers 乱流の数値計算の例としては Jeng¹¹⁾ の報告がある。Jeng はここで使用したモデルとは違って

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (3.21)$$

について乱流の初期値問題を解いた。ここで $f(x,t)$ は偶然外力で、*ideal random function* を使って与えられる。そして u の初期のアンサンブルに対応して (3.21) が数值的に解かれ、そのアンサンブル平均によっていろいろな相関量を求められている。もちろんわれわれの場合と Jeng の場合では、使用した方程式はもとより境界条件やいろいろなパラメータも違うので結果をそのまま比較は出来ないが、ある面での定性的な一致、例えば k^{-2} スペクトルや $\tau = 2.0$ の近くで定常性が生じてくる等が見られる事は興味深い。

§4 お 暇

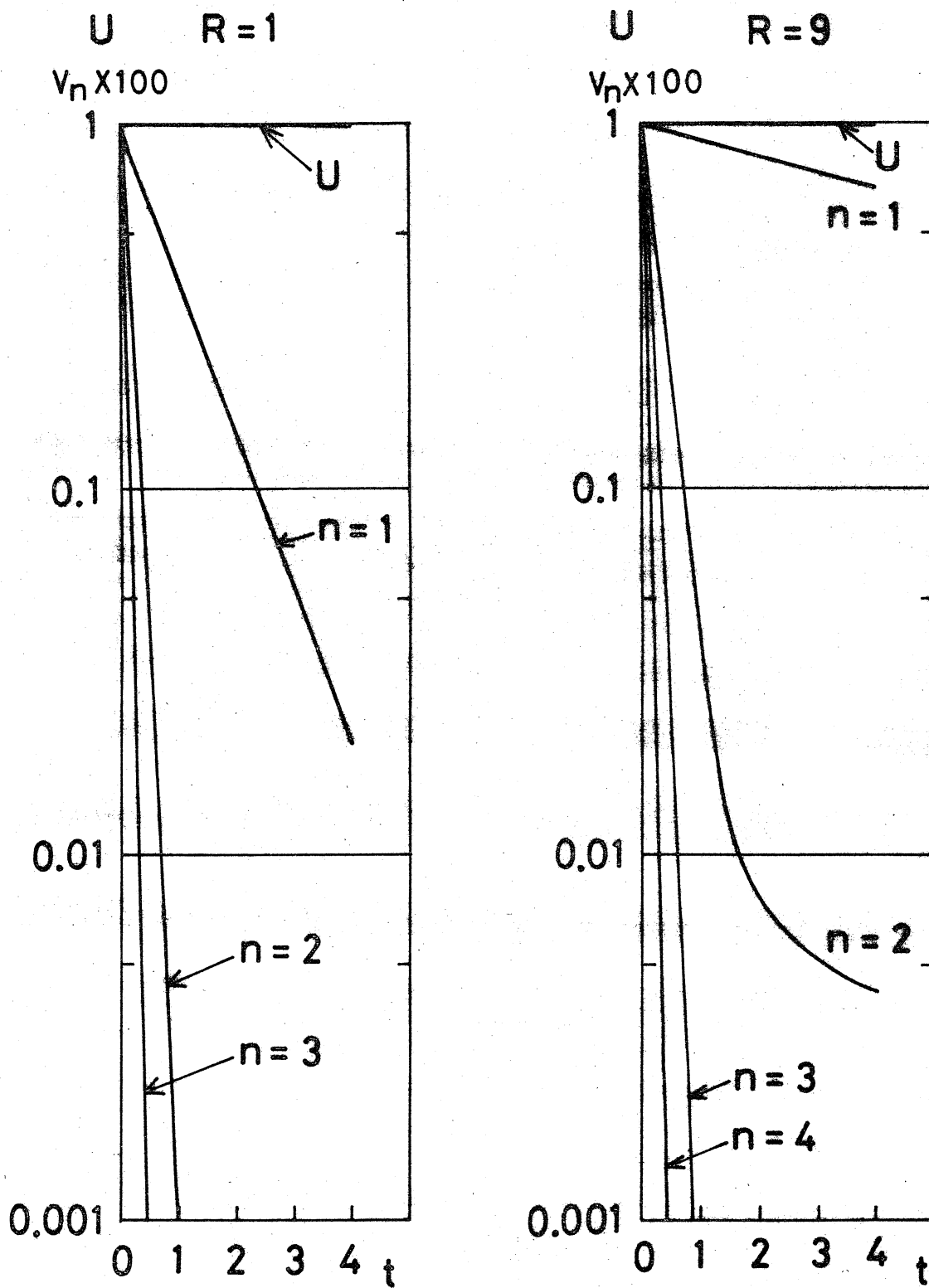
これまで述べてきたのは、channel flow をモデル化した Burgers モデル (3.1), (3.2) についての Novikov 方程式の数

値解である。得られた結果はこれまで述べて来たように、物理的に見て乱流のいくつかの側面を記述している。とくに偶然外力が赤色ノイズの場合には $R=10$ と $R=100$ とで非線型の効果の違いが顕著に現れている。また白色ノイズの場合には、外力のスペクトルが均一であったために、レイノルズ数が小さく非線型効果が無視出来る場合でも k^{-2} スペクトルが現われた。このような事はもちろん他のノイズでは生じない事である。さらに、これまでの結果は ϵ が 2 以上になると定常なスペクトルの形成がほゞ期待出来る事を示している。この時間はもちろん加えたエネルギーの大きさに依存すると考えられるが、同程度の B_m についてはあまり差異は見られない。また $R=100$ で達成された定常乱流の構造が赤色ノイズでも白色ノイズでもあまり差異がない事は興味深い。この事はオペレータ Q_m が線型である時はもちろんありえないので、非線型相互作用のもたらす大きな結果であると考えられる。

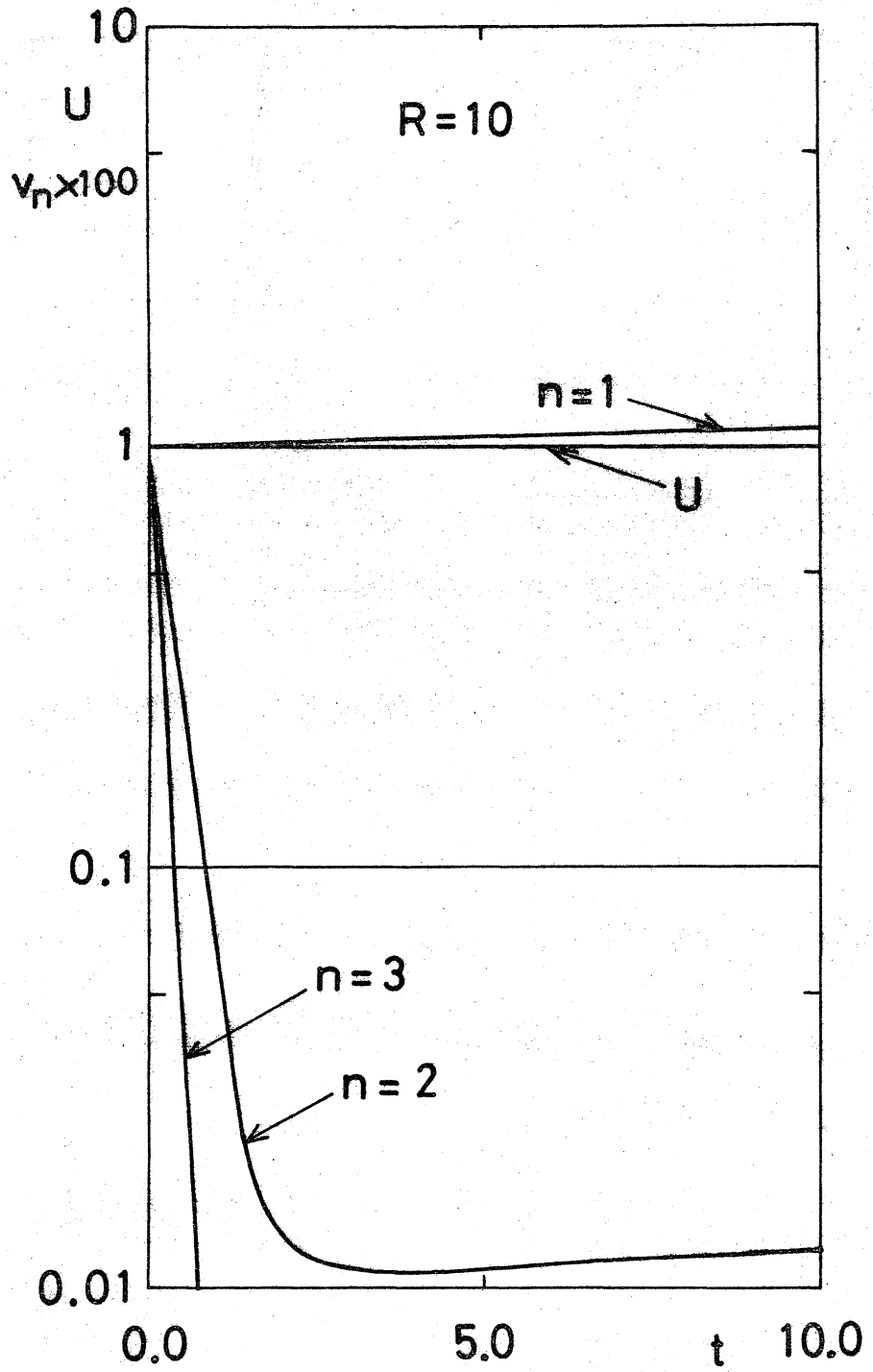
文 献

- 1) L.D. Landau and E.M. Lifshitz : Fluid Mechanics
(Pergamon, New York 1959) Chap. 17.

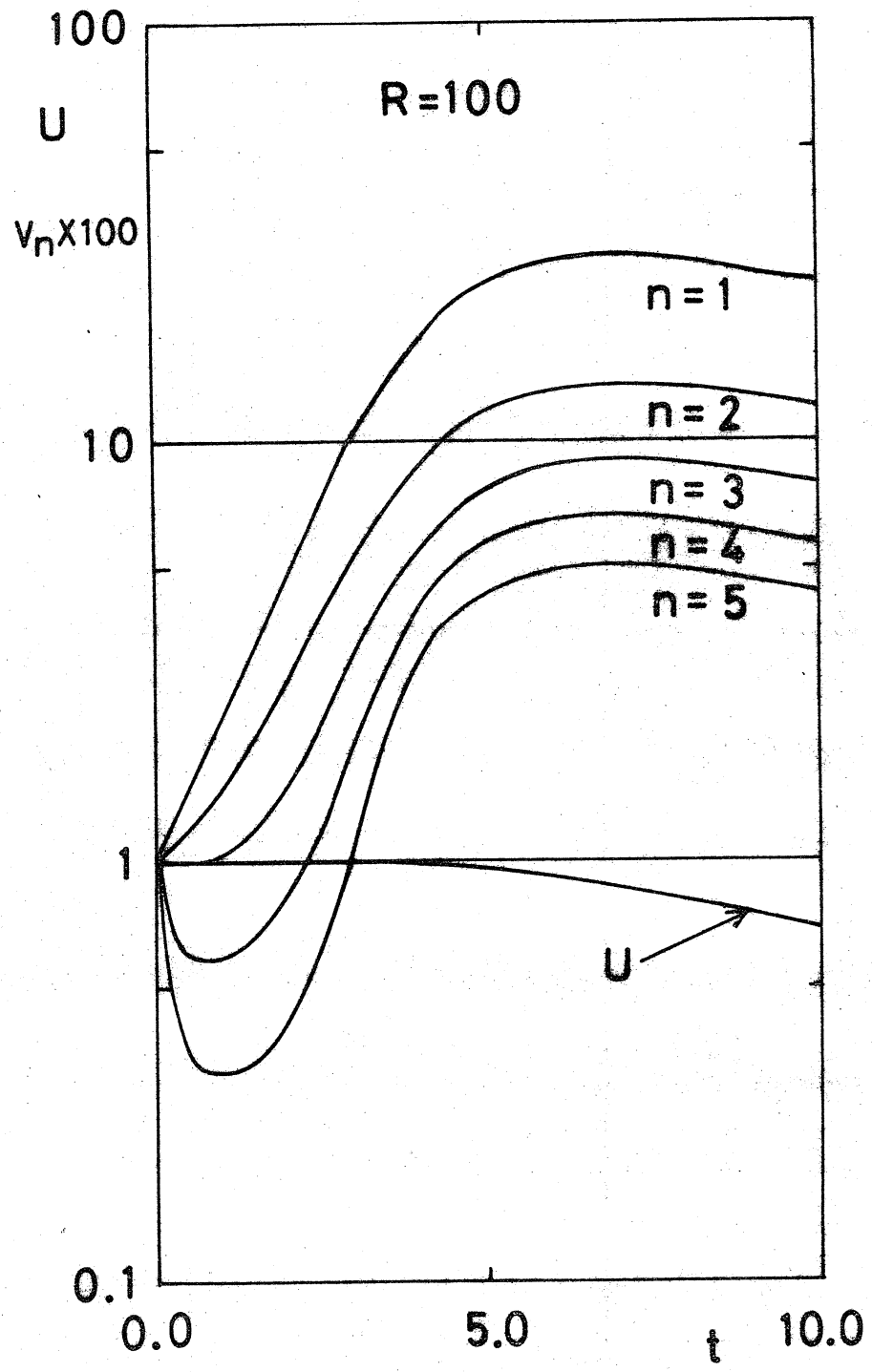
- 2) G. E. Kelly and M. B. Lewis : *Phys. Fluids*, 14, 1925 (1971), B. B. Saleeby and M. B. Lewis : *Phys. Fluids*, 14, 1931 (1971).
- 3) 細川 巖 : なかみ, 第3巻第2号, 40 (1971)
- 4) S. F. Edwards : *J. Fluid Mech.* 18, 239 (1964)
- 5) E. A. Novikov : *Soviet Phys. - JETP* 20, 1290 (1965).
- 6) I. Hosokawa : *J. Phys. Soc. Japan* 25, 271 (1968)
- 7) E. Hopf : *J. Rath. Mech. Anal.* 1, 87 (1952)
- 8) I. Hosokawa and K. Yamamoto : *Phys. Fluids*, 13, 1683 (1970)
- 9) 細川 巖, 山本 稀義 : 数理解析研究所講究録 80, 45 (1970)
- 10) J. M. Burgers : *Adv. Appl. Mech.* 1, 171 (Academic Press 1948)
- 11) D. T. Jeng : *Phys. Fluids* 12, 2006 (1969)



第1図 Burgers 方程式の数値解

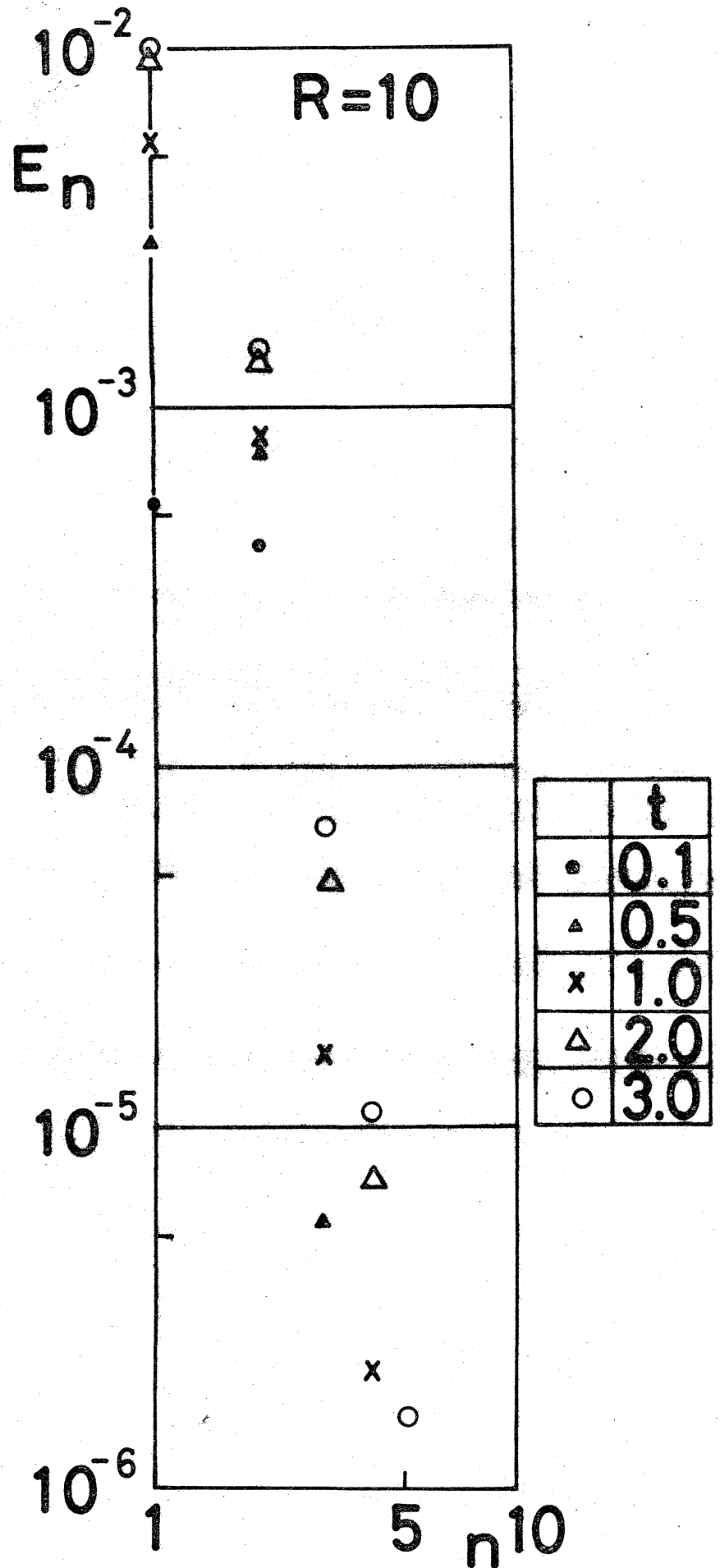


第2図 Burgers 方程式の数値解



第3図 Burgers 方程式の数値解

第4図 エネルギースペクトル



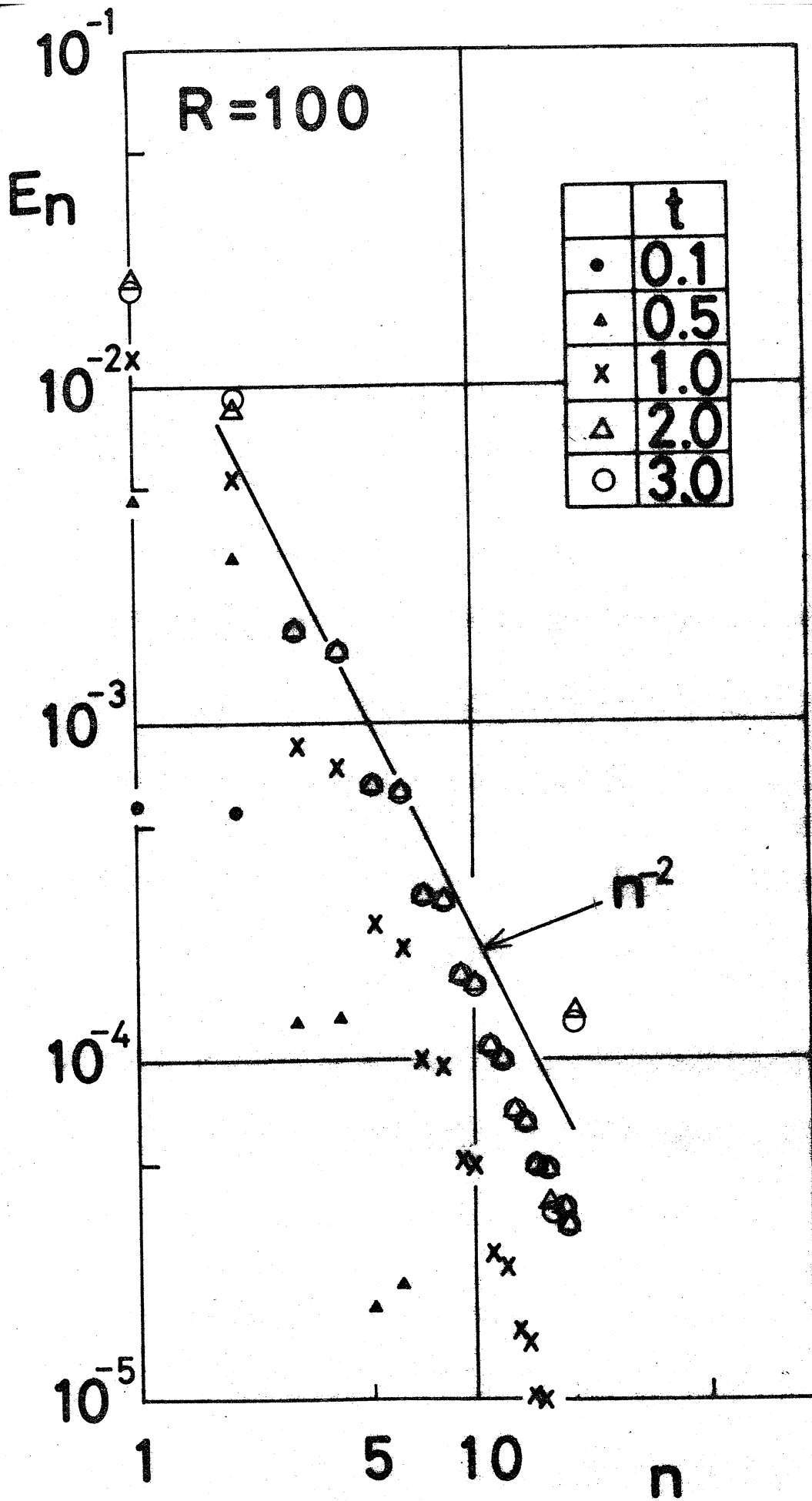
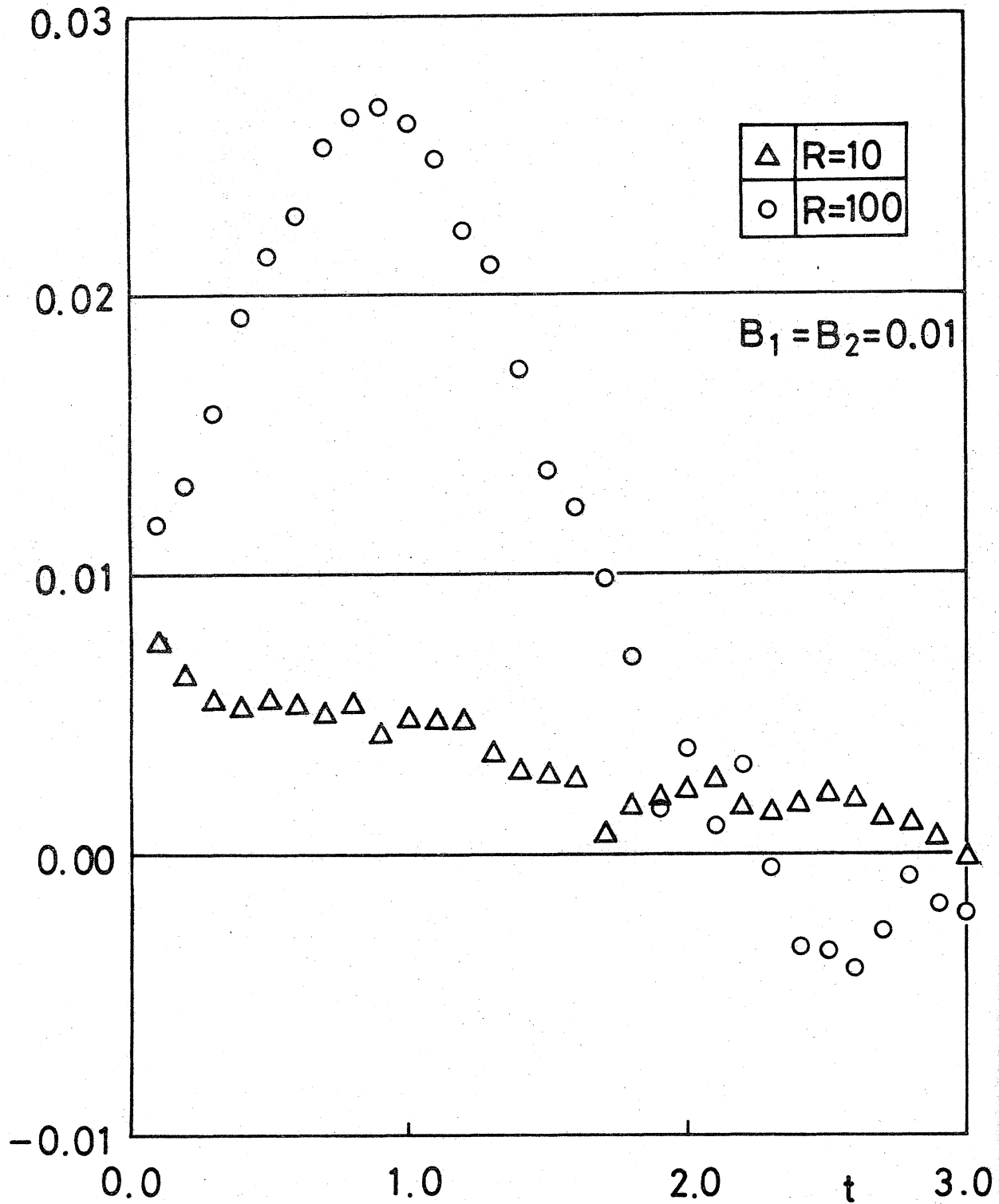
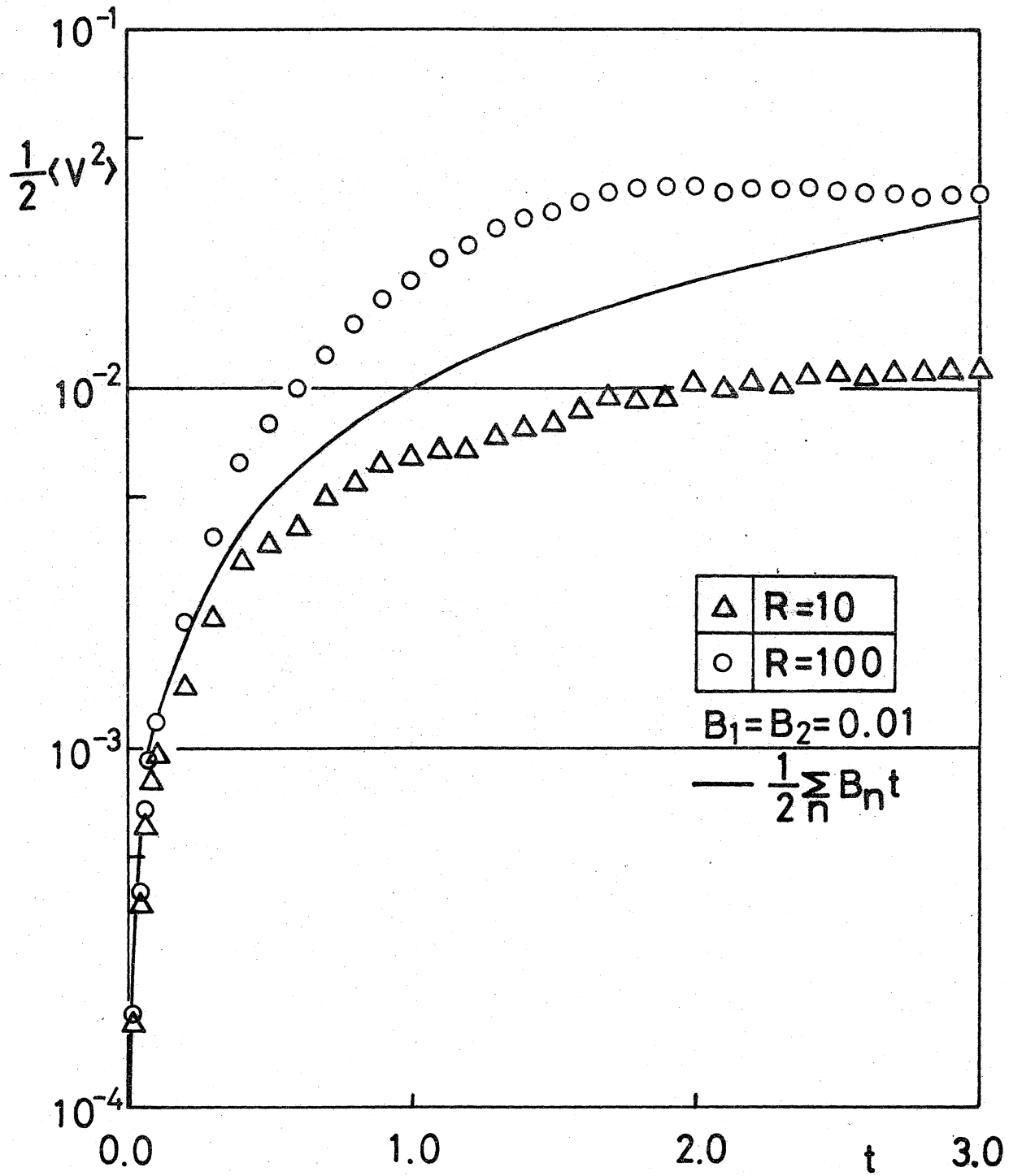


図5 図 エネルギー-スペクトル

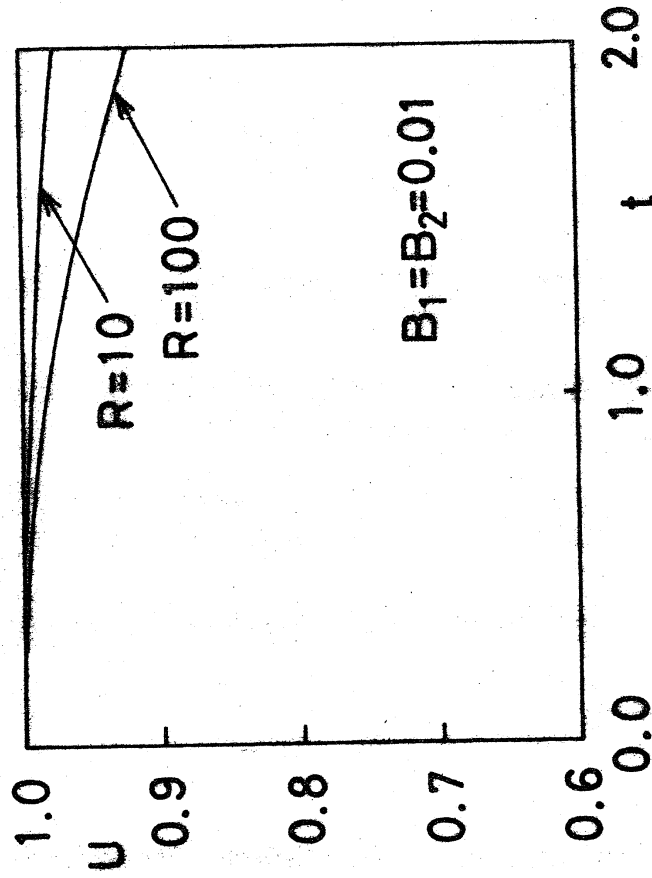
$$\frac{\Delta(\sum_n \langle V_n^2 \rangle)}{2n \Delta t}$$



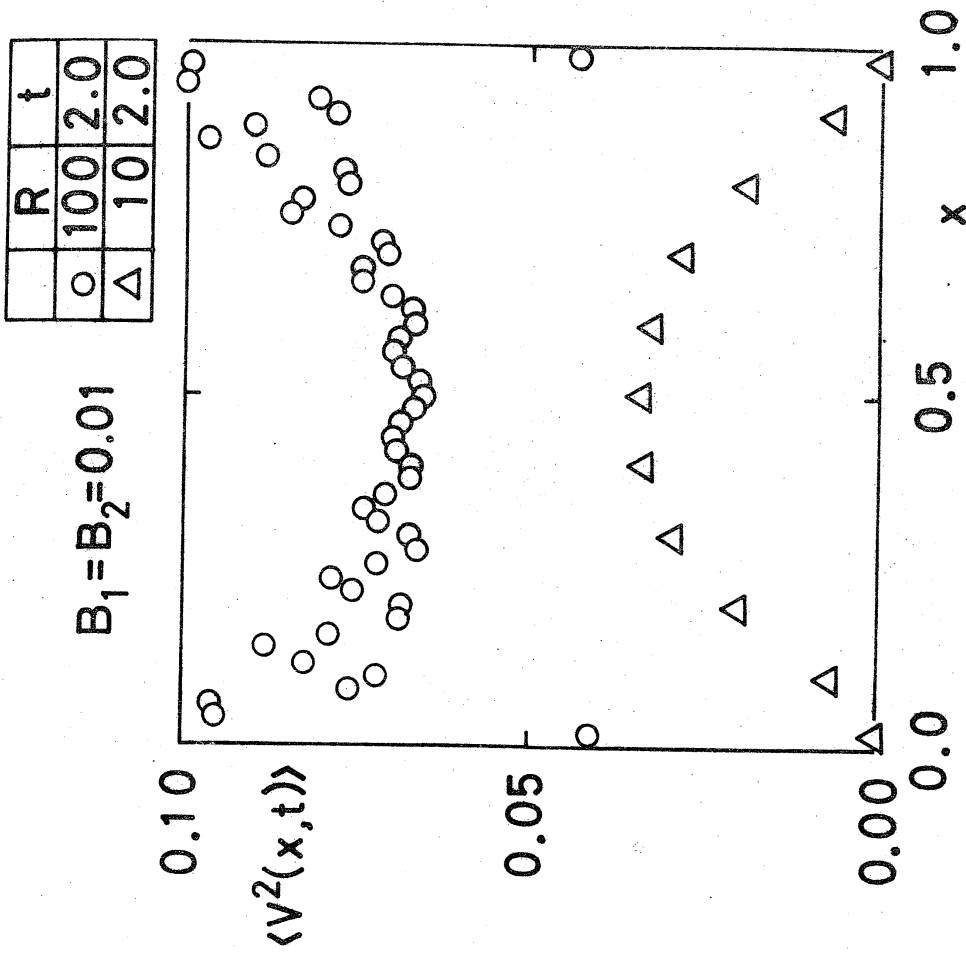
第6図 乱れのエネルギー増加率



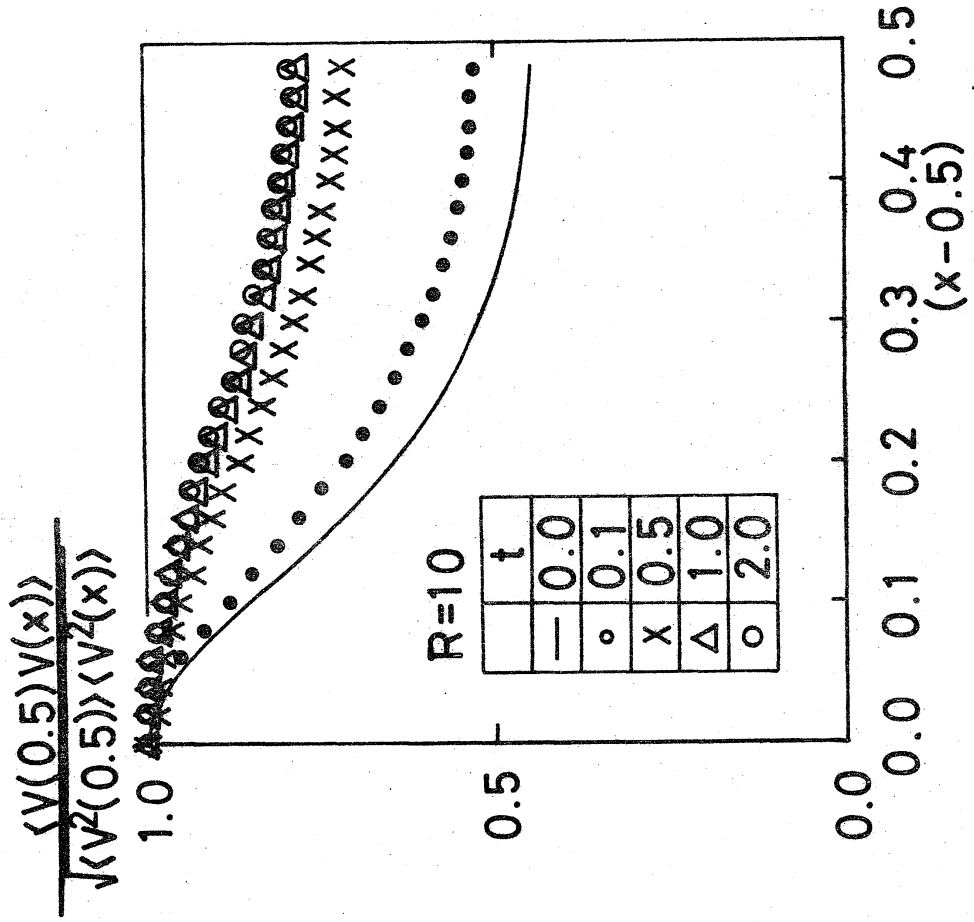
第7図 乱れの全エネルギー



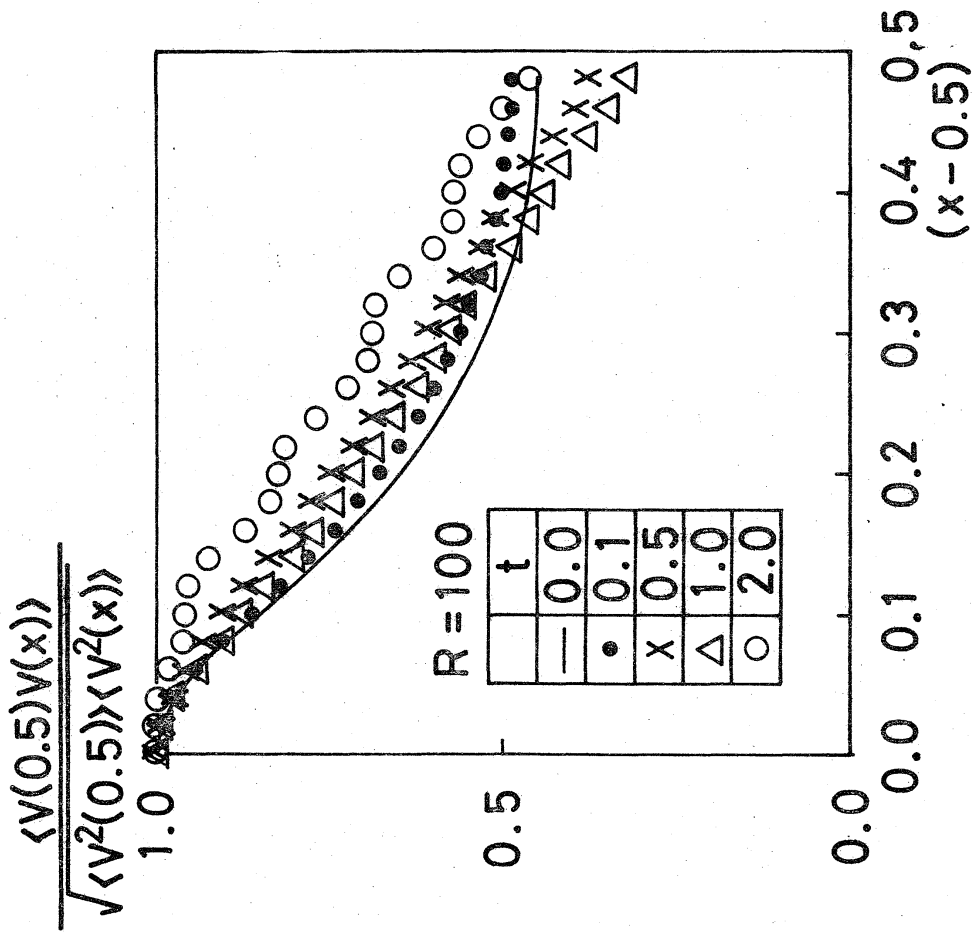
第8图 主流 U



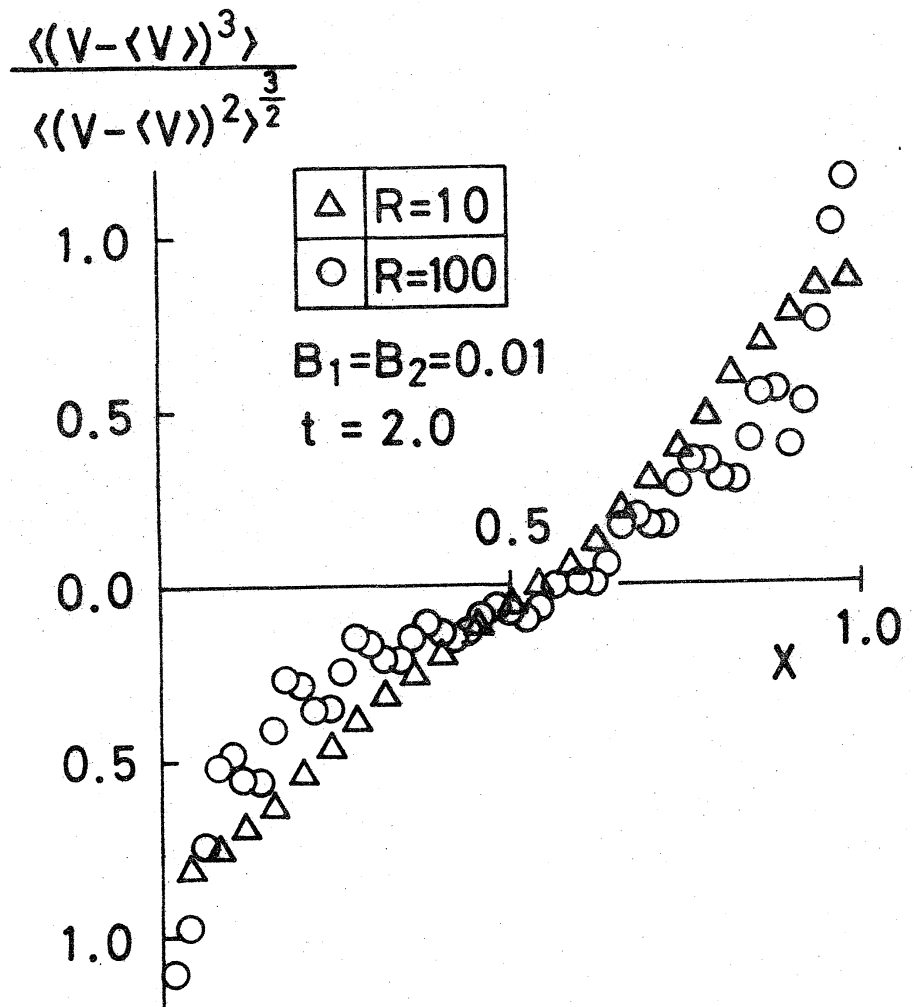
第9図 乱れのエネルギー分布



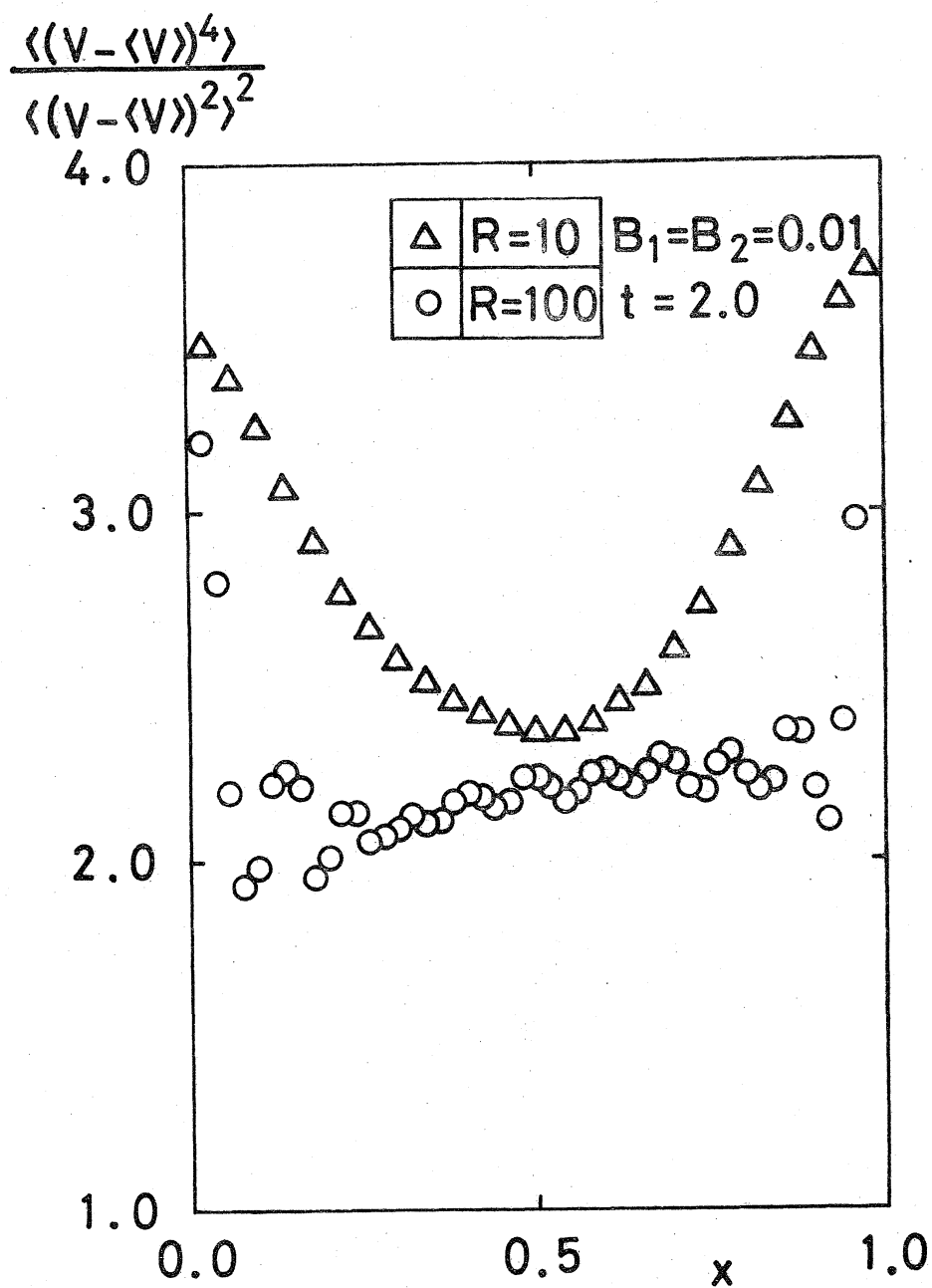
第10図 相関々数



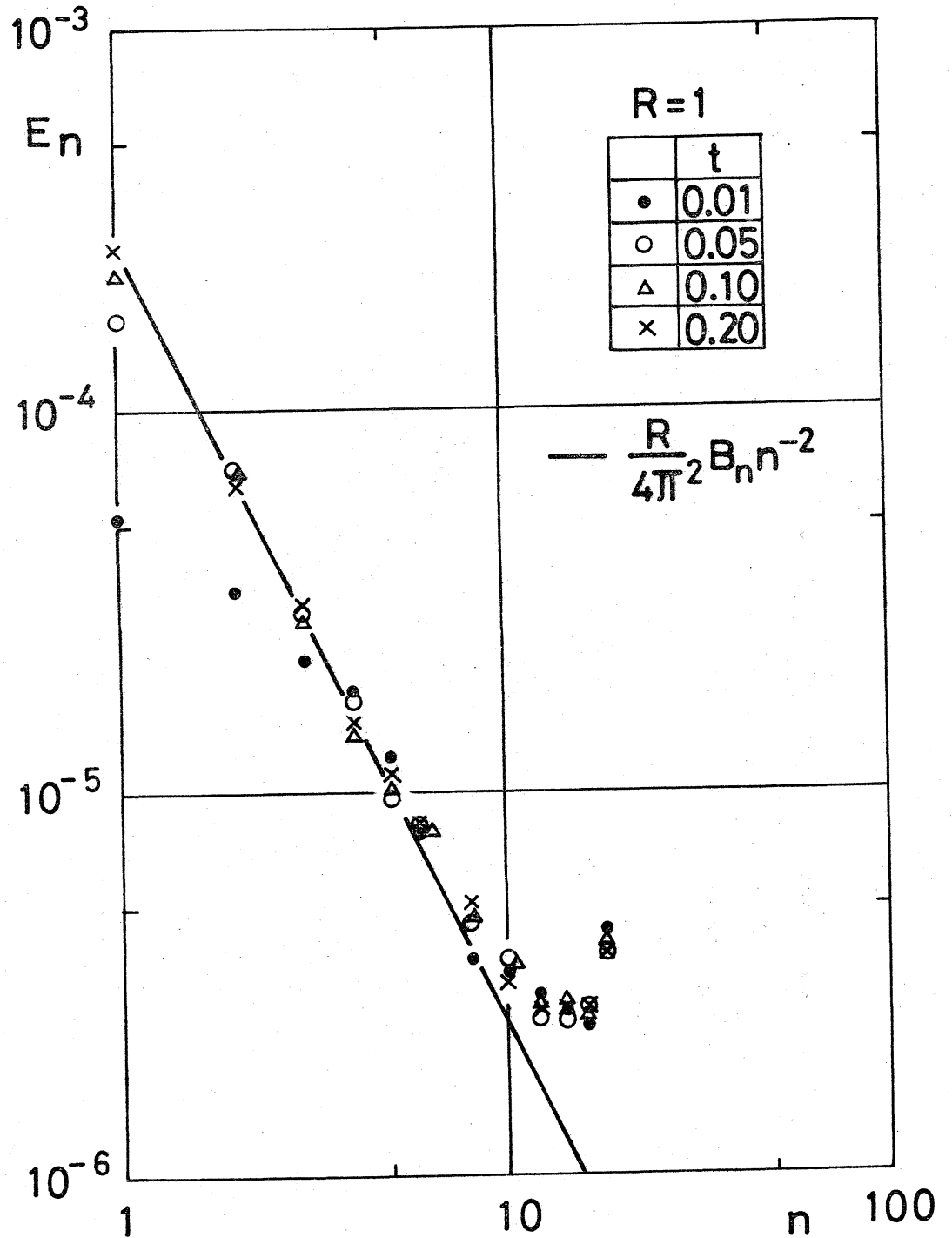
第11図 相関々数



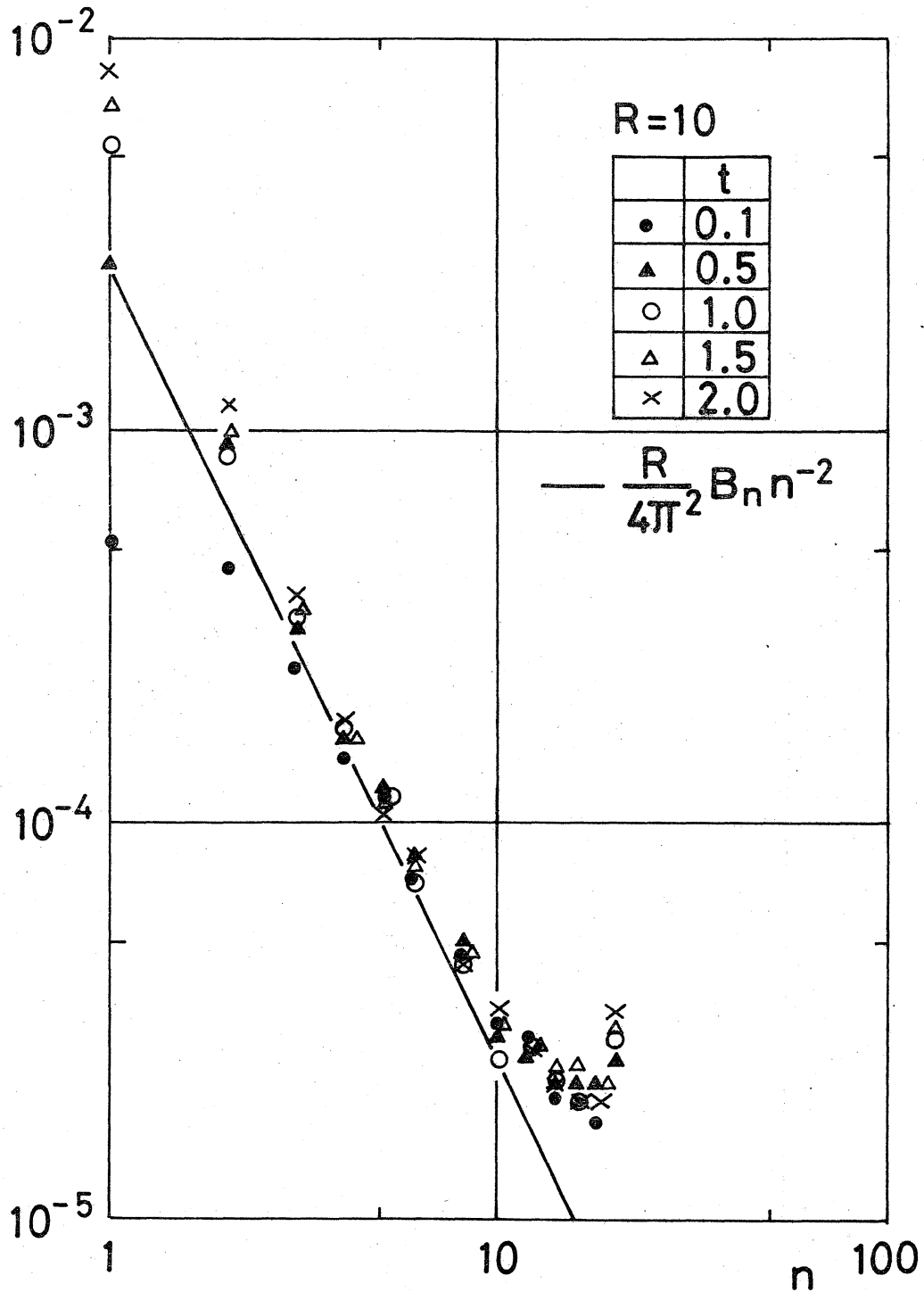
第12圖 歪度因子



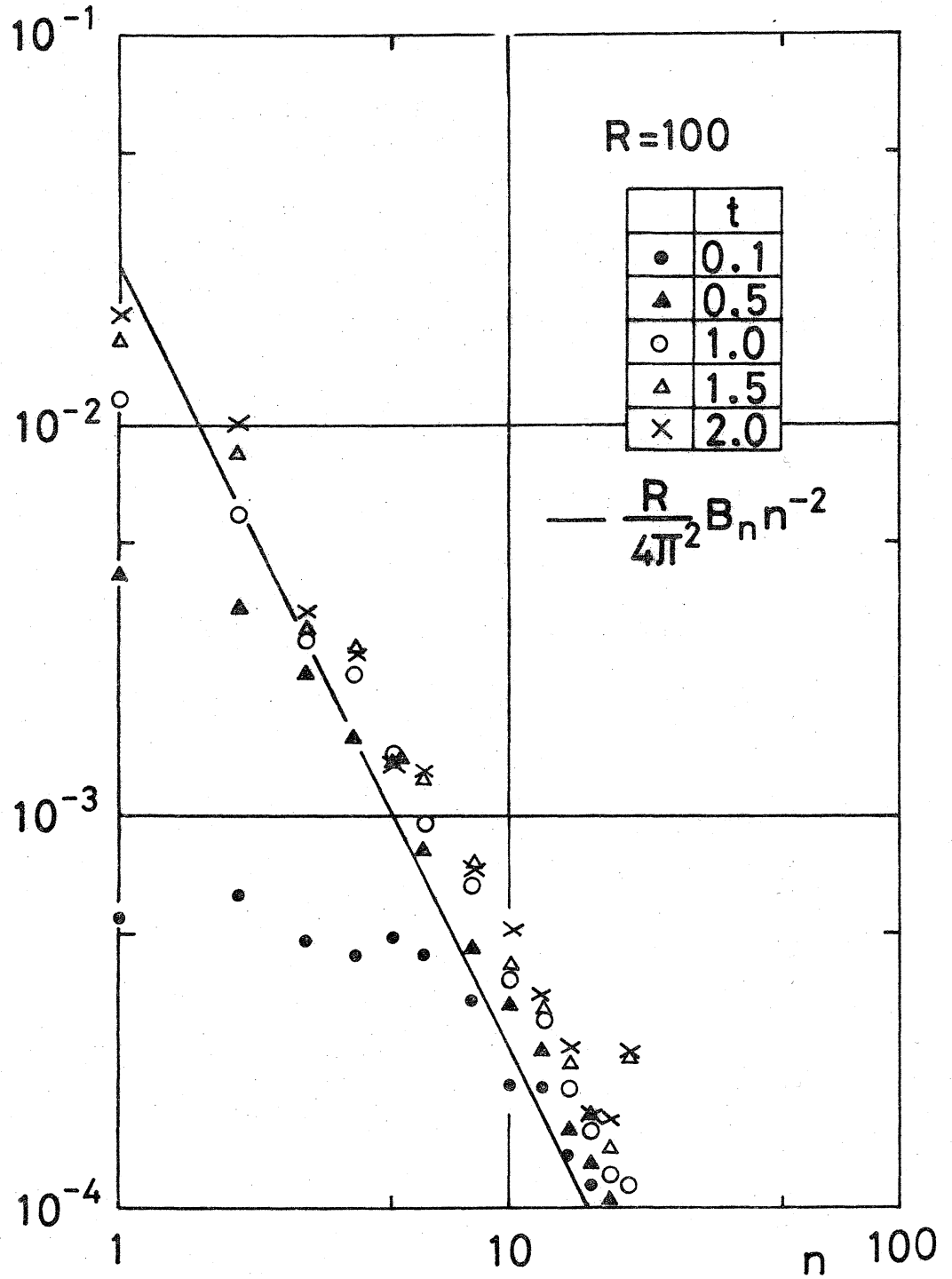
第13图 扁平度因子



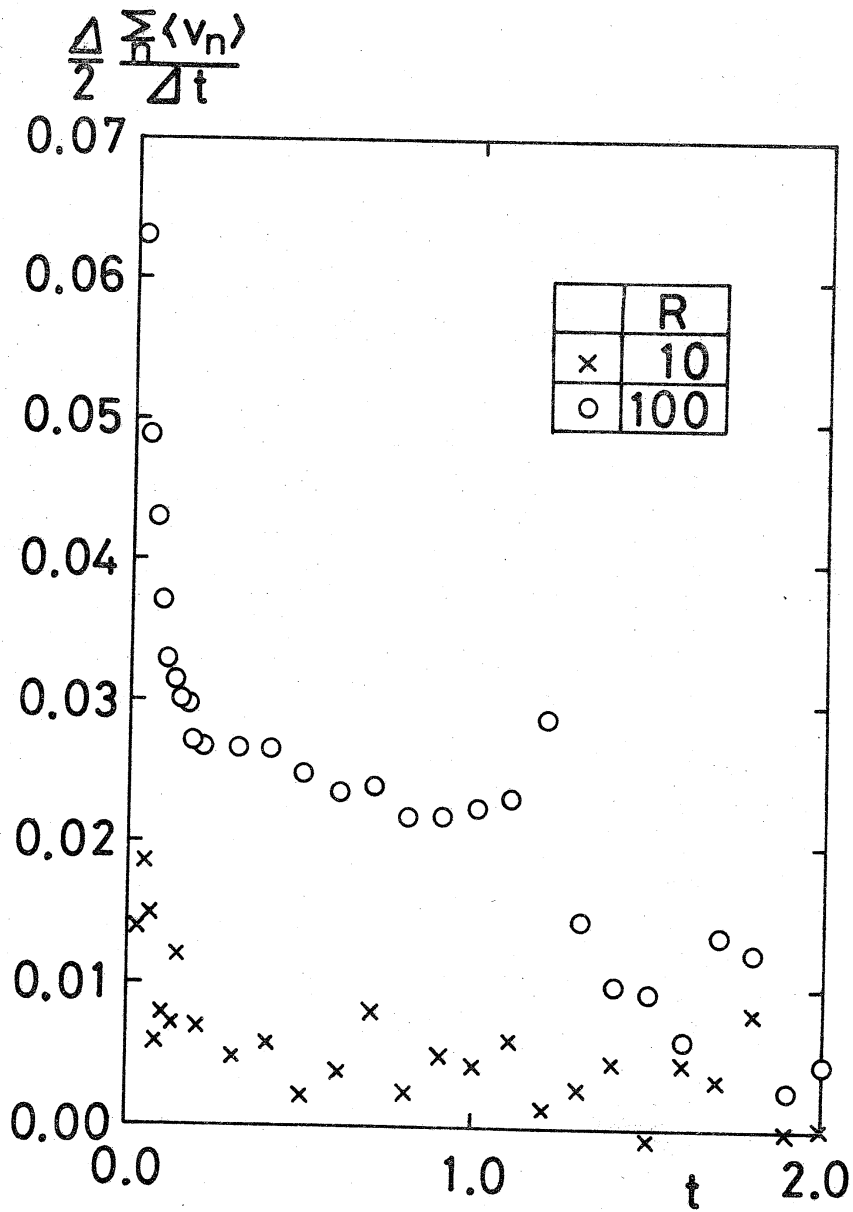
第14図 エネルギースペクトル



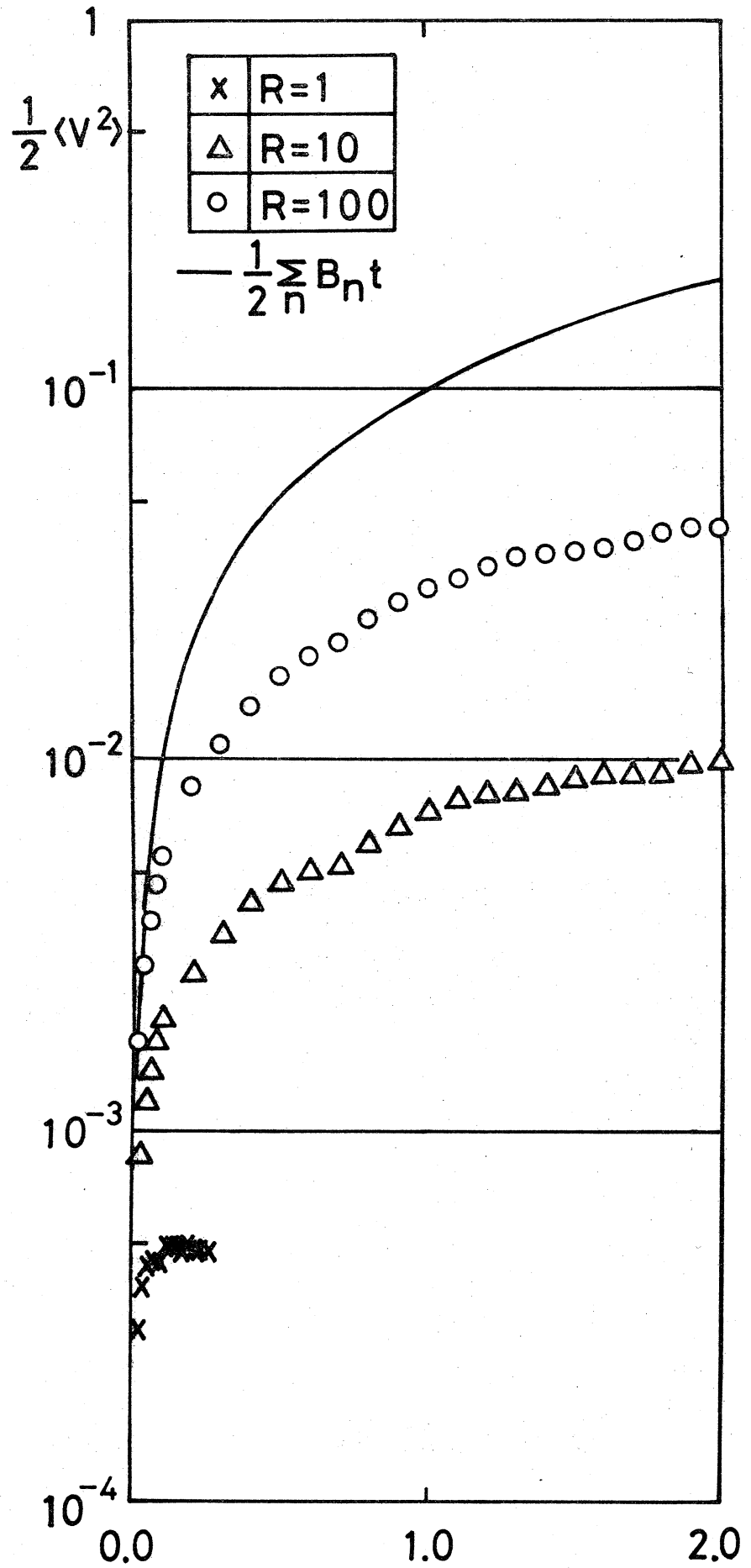
第15図 エネルギースペクトル



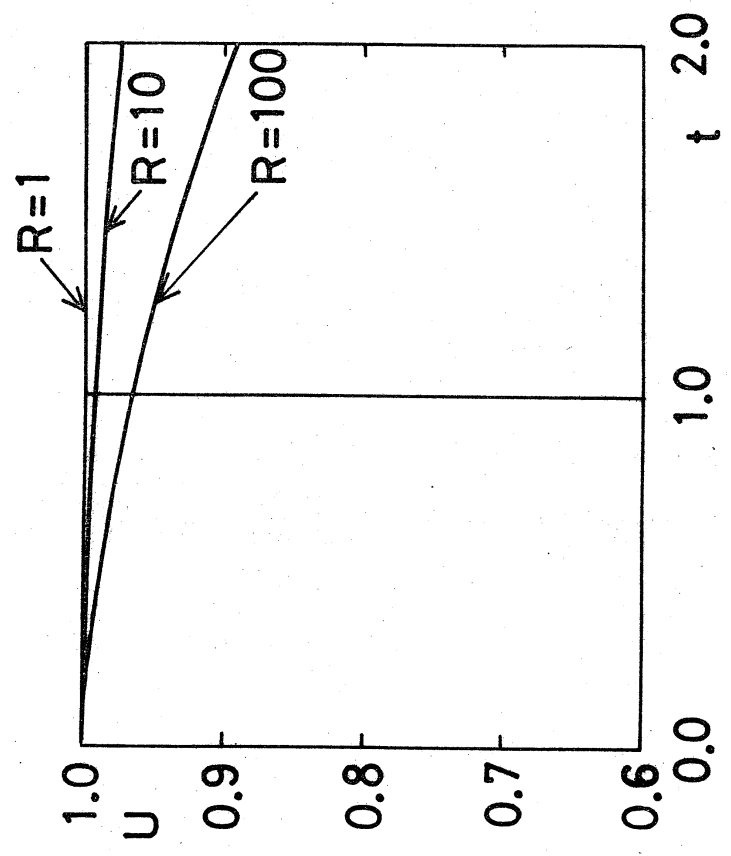
第16図 エネルギースペクトル



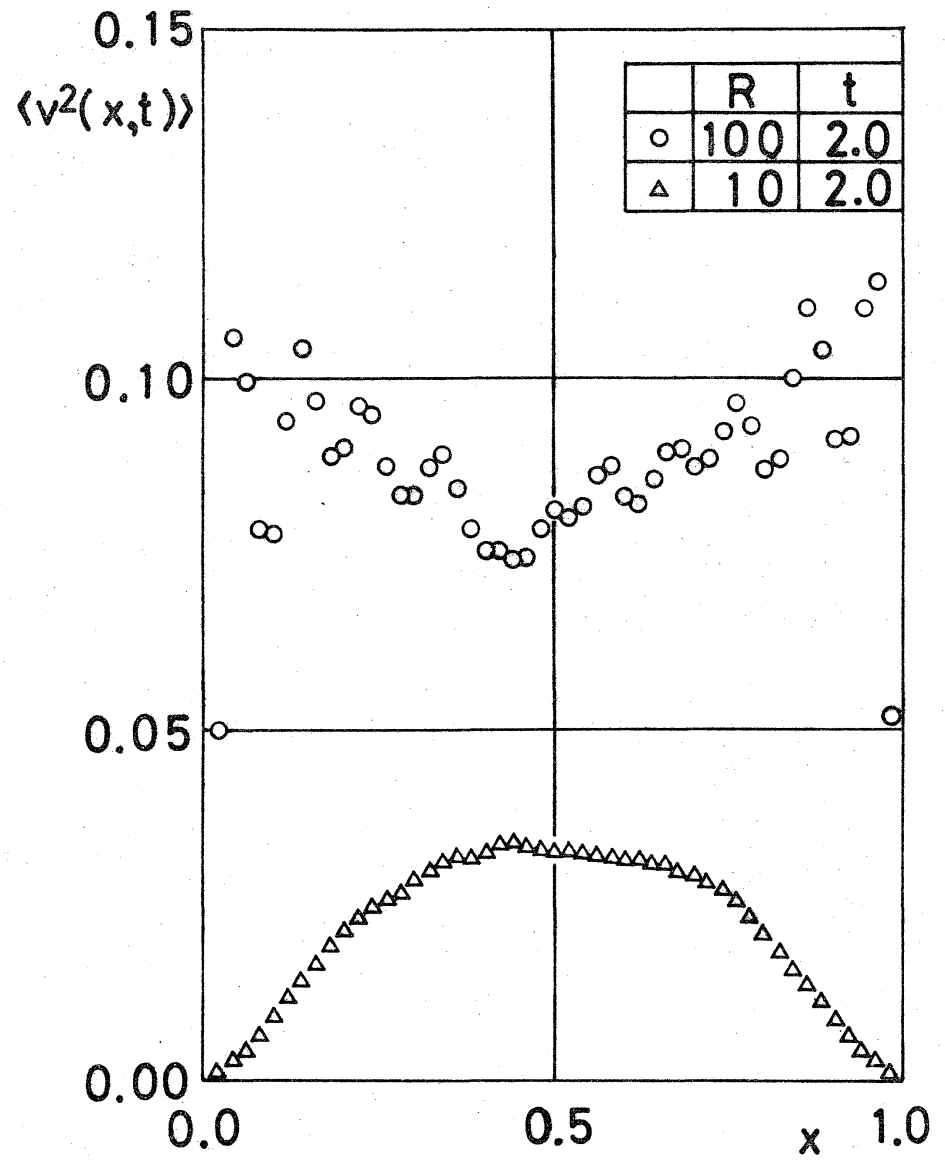
第17図 乱れのエネルギー増加率



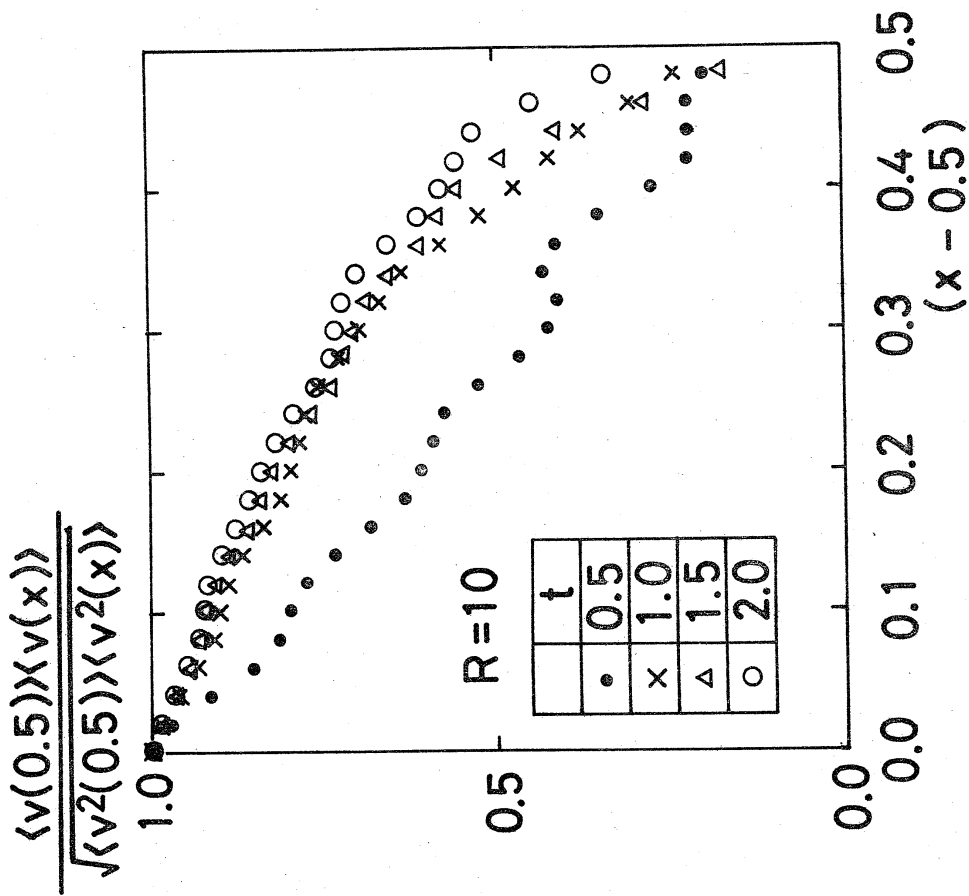
第18図 乱れの全エネルギー



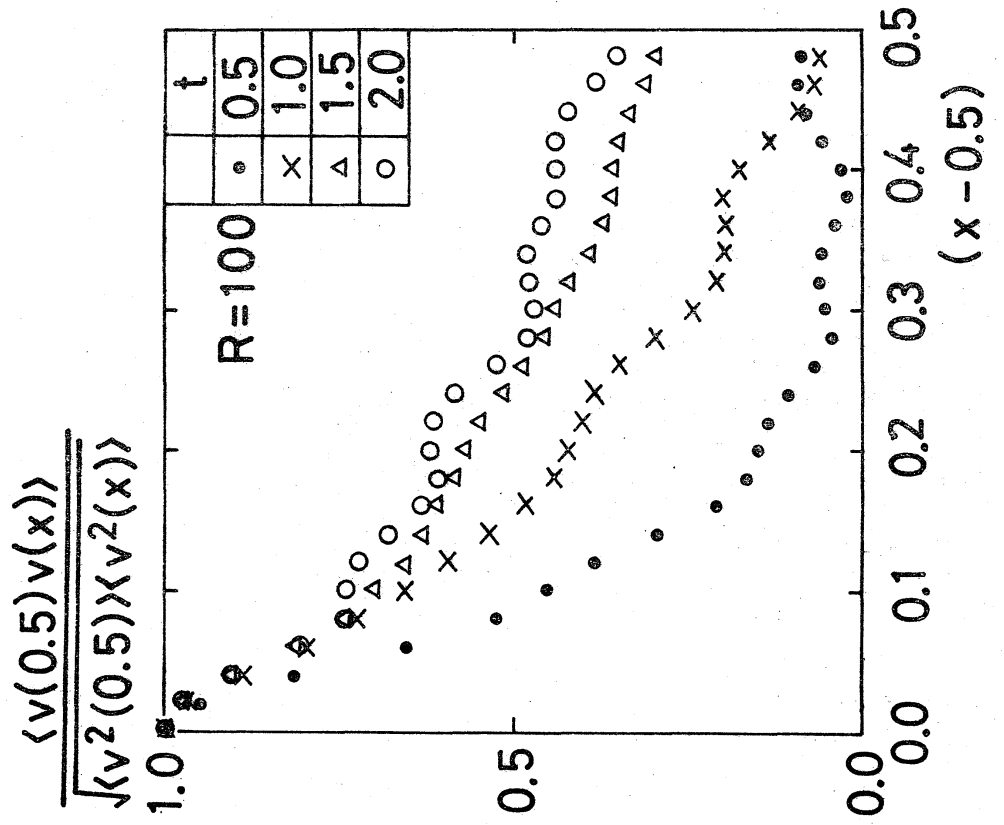
第19圖 主流 U



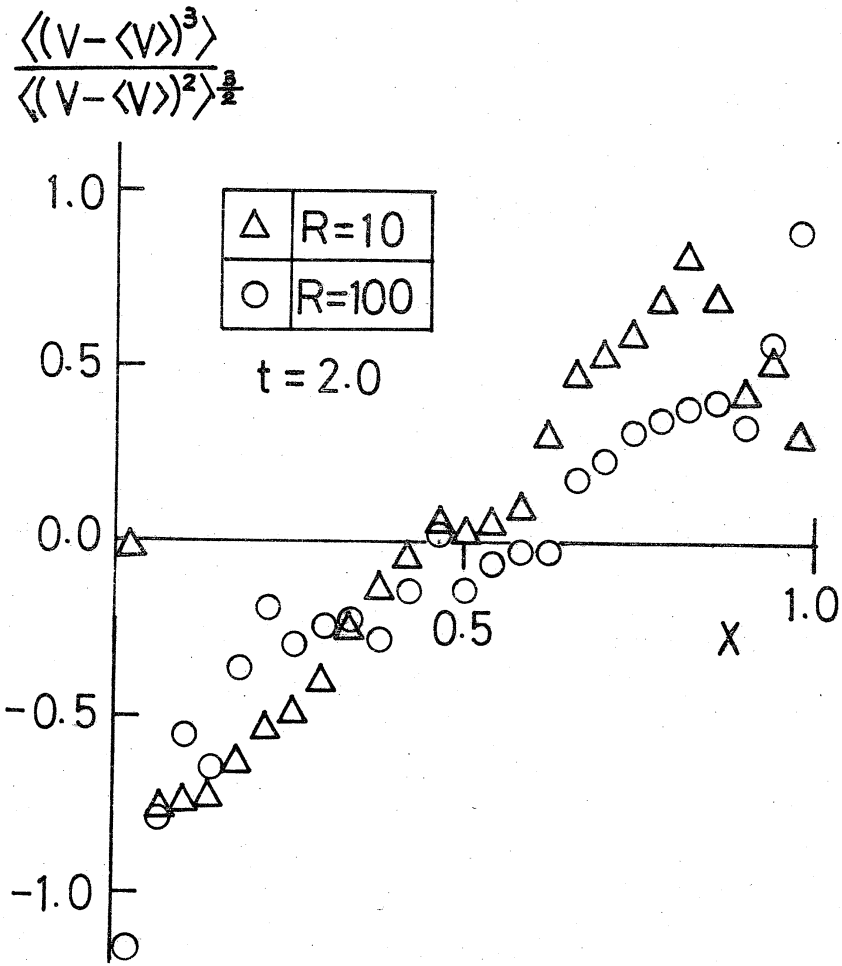
第20図 乱れのエネルギー分布



第21図 相関係数

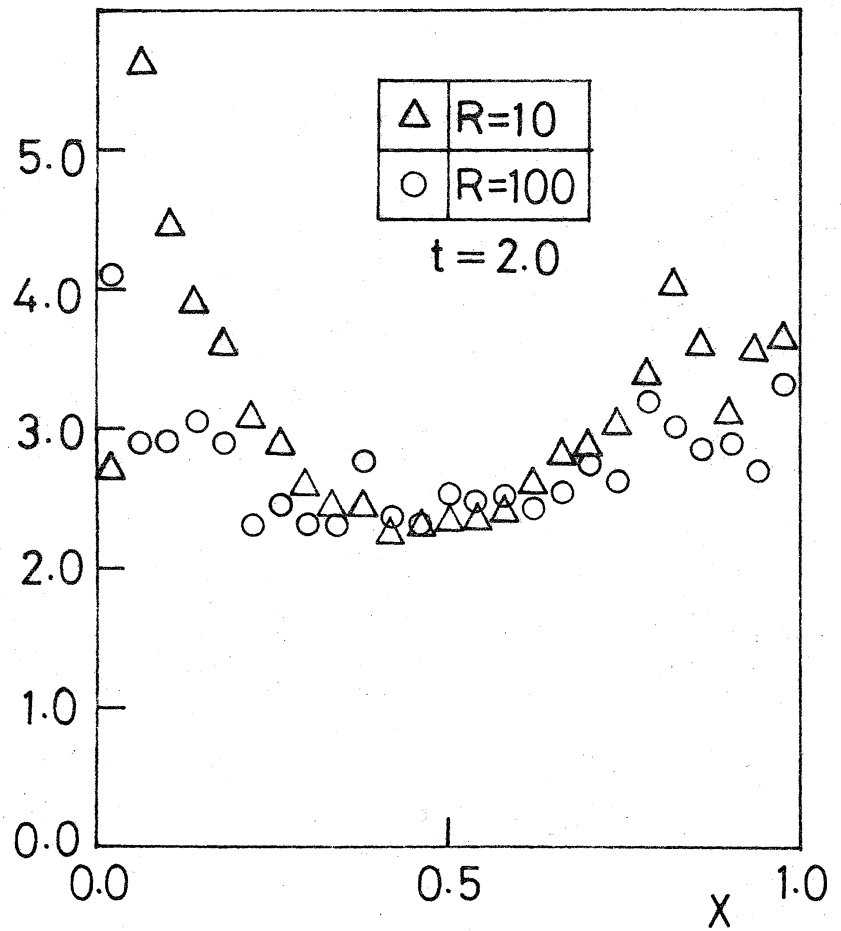


第22図 相関々数



第 23 图 歪度因子

$$\frac{\langle (V - \langle V \rangle)^4 \rangle}{\langle (V - \langle V \rangle)^2 \rangle^2}$$



第24圖 扁平度因子