

数列にもとづく円周率の計算

京大教理研 一松 信

§1. 問題

円周率 π の計算法には、マチンの公式はじめ多くのよい公式が知られている。しかしたとえば教育用の練習に、10桁くらい求めるのならば、他の方法がいろいろ考えられる。

円に内接または外接する正 n 角形の周長を計算し、 n を次々に 2 倍してえられる数列の極限值として、 π の近似値を求めるのは、微分積分学の発見まで、ほとんど唯一の π の計算法であった。単に数列を次々に求めるだけでなく、それに巧妙な加速をほどこして、近似をよくする工夫は、ずいぶん大勢が試みている。

じつせいに、ただ内接、外接多角形の周ではとむだけなら、96 角形でも、アルキメデスのえた $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ くらいしかでないし、35 桁求めるには、ルドルフのやったように 2^{62} 角形までの反復がある。しかしうまく加速すれば、たとえば [5] にあるように、4 ~ 64 角形のデータから、

3.1415926534

くらい¹⁰の値が出せる。建部賢弘(1664-1739)は、正¹⁰角形までのデータから、小数点以下41桁正しい π の近似値を求めている([2]参照; [3]にも記述あり)。

これらの方法を、現代流に解釈し直すことを主眼としたのであるが、結果的には、これらの方法は、べき級数の形で表現される誤差の主要項をぎっぎに消してゆく同種の算法(たとえば[4], 算法12.4)の応用であることがわかった^で、理論的にはとくに新しいことはない。事実上^は[1], [3]の紹介にすぎない。しかしこの種の実験なら、電卓でも可能であり、初等教育の教材の一つとして考えられると思う。

なおあわせて数値積分による π の計算にも言及する。

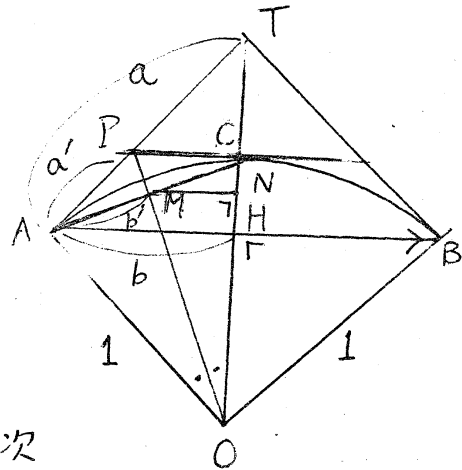
§2. 計算公式

便宜上半径1の円に外接および内接する正 n 角形の一辺を $2a, 2b$; 正 $2n$ 角形の一辺を $2a', 2b'$ とすれば、容易に

$$(1) \quad a' = (\sqrt{1+a^2} - 1)/a, \quad b = a/\sqrt{1+a^2}$$

$$b'^2 = (1 - \sqrt{1-b^2})/2$$

がえられる。これは、三角関数の半角公式からもえられるし、また初等幾何学的な考察からも示される。— たとえば図から、 $\overline{AP} : \overline{AT} = \overline{OA} : (\overline{OA} + \overline{OT})$; $\overline{AH} \cdot \overline{OT} = \overline{OA} \cdot \overline{AT}$



からはじめの2つの式がでるし、

$$\overline{CM}^2 = \overline{CN} \cdot \overline{CO} = (\overline{CH}/2) \cdot \overline{CO}$$

から最後の式がでる。

a, b 両方とも使うときは、

$a_1 = 1$ ($n=4$) から始めて、順次

$$(2) \quad a_{m+1} = (\sqrt{1+a_m^2} - 1) / a_m \\ b_m = a_m / \sqrt{1+a_m^2}$$

により、順次 $2^{m+1} a_m, 2^{m+1} b_m$ の列を作る。 b のみするとき

には、 $b^2 = s$ の形の列にして、 $s_1 = 0.5$ ($n=4$) から始め

て、 $s_{m+1} = (1 - \sqrt{1-s_m}) / 2$ により順次 $4^{m+1} s_m$ の列を

作る。もちろんこのままでは桁落ちが生ずるから、

$$(3) \quad a_{m+1} = a_m / (1 + \sqrt{1+a_m^2}) \\ s_{m+1} = s_m / 2(1 + \sqrt{1-s_m})$$

と変形して計算する。 a_m, s_m があまり小さくなると、平方根の引き算の情報落ちが生ずるので、テイラー展開により、

$$(4) \quad a_{m+1} = \frac{a_m}{2} \left[1 - \frac{1}{4} a_m^2 + \frac{1}{8} a_m^4 - \dots \right]$$

の形で計算し、 $\sqrt{1+a_m^2}$ は、あらかじめ $1 + a_m a_{m+1}$ として計算するほうが賢明である(そうすれば平方根の計算も不要になる)。

なお [3] には村松茂靖 (赤穂義士の一人村松喜兵衛の義父)

が 2^{15} 角形までの同長から円周率を2桁 だした (ただし誤差 10^{-8}) ことが紹介されている。彼の計算は二十数桁の多倍長計算で桁落ちをおさえる方式 ([3] の公式 (5)) で、とくに桁落ちをおさえるための工夫はしていいようである。

§3. 結果と加速

TOSBAC 3400 (仮教部 37ビット) の単長計算によっても、 2^{20} 角形までの反復で 3.1415926535 がえられる。

加速の一つの方法は、外接、内接多角形の周が

$$A = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + \frac{2\pi^5}{15n^4} + \dots = n \tan \frac{\pi}{n}$$

$$B = \pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + \frac{\pi^5}{120n^4} - \dots = n \sin \frac{\pi}{n}$$

であることを使い、 A, B を 1:2 の重みで平均して

$$C = \frac{A+2B}{3} = \pi + \frac{\pi^5}{20n^4} + \dots$$

を作ることである。その上で、 C の誤差が n が倍になるとほぼ $1/16$ になることを使って、1:16 の重みで平均し、これをくりかえしてゆく。この加速を2度行なうと、正64角形までの結果だけで、3.1415926535 がえられる。

(別表参照)。

表 1. a

辺数	外接 A	内接 B	$C = (A+2B)/3$
4	4.00000 00000	2.8284271247	3.2189514165
8	3.3137084990	3.0614674590	3.1455478057
16	3.1825978781	3.1214451523	3.1418292942
32	3.1517249074	3.1365484906	3.1416072962
64	3.1441183852	3.1403311570	3.1415935664

表 1. b C による加速値 (3.14 を略す)

3.14 +

06542316

15813934 15961103

15924963 15926725 15926591

15926511 15926535 15926536 15926536

表 1. c A のみによる加速値

3.0849446653

3.1388943378 3.1424909826

3.1414339172 3.1416032225 3.1415891311

3.1415828778 3.1415928085 3.1415926433 3.1415926570

表 1. d B のみによる加速値

3.1391475704

3.1414377167 3.1415903931

3.1415829367 3.1415926180 3.1415926533

3.1415920458 3.1415926531 3.1415926536 3.1415926536

外接圓のみによる加速値では、オーダーが1つ低く、64まででは8桁しかでない。ただし128角形の値まで使うと3.1415926536 が出る。

[2] によると、建部賢弘は、内接多角形の周長の2乗の系列 $\sigma_m = 4^{m+1} s_m$ に、つぎのよる加速をほどこしている。まず $\sigma_{m+1} - \sigma_m$ を作ると、隣り同士の比 $(\sigma_{m+2} - \sigma_{m+1}) / (\sigma_{m+1} - \sigma_m)$ は $1/4$ に近づく。もし正確にこの比が $1/4$ ならば、 σ_m の極限値を σ とすると

$$\frac{\sigma_{m+2} - \sigma_{m+1}}{\sigma_{m+1} - \sigma_m} + \frac{\sigma_{m+3} - \sigma_{m+2}}{\sigma_{m+1} - \sigma_m} + \dots + \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{\sigma_{m+1} - \sigma_m} = \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_{m+1}}{\sigma_{m+1} - \sigma_m}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{k-m}} \rightarrow \frac{1}{3} \quad (k \rightarrow \infty)$$

から、 $(\sigma - \sigma_{m+1}) / (\sigma_{m+1} - \sigma_m) = 1/3$, 求める

$$(5) \quad \sigma = \sigma_{m+1} + \frac{1}{3}(\sigma_{m+1} - \sigma_m) = \frac{4}{3}\sigma_{m+1} - \frac{1}{3}\sigma_m$$

である。これは σ_{m+1} と σ_m とを $4:-1$ の重みで平均したものである。

$$\sigma'_m = (5) \text{ の右辺}$$

とおく。 $\sigma'_{m+1} - \sigma'_m$ については、同様の比が $1/4^2 = 1/16$ に近づくので、同様にして

$$(6) \quad \sigma''_m = \sigma'_{m+1} + \frac{1}{15}(\sigma'_{m+1} - \sigma'_m)$$

とする。以下順次比が $1/4^3$, $1/4^4$, ... に近づくので、これを可能な限り反復する。ここで比の極限値は、実験的事実として計算を進めているが、このことは、つぎのようにして、

裏づけられる。すなわち ([4] 定理 12.4 参照),

$$A(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{k-1} y^{k-1} + R_k(y)$$

$$|R_k(y)| < C_k y^k, \quad y > 0$$

(必ずしもこの級数は、収束しなくともよい、つまり漸近展開でもよい) ならば、 $(m \geq n)$

$$A_{m,0} = A(x^m y_0), \quad A_{m,n+1} = \frac{A_{m,n} - x^{n+1} A_{m,n-1}}{1 - x^{n+1}}$$

といた列は、 n がますます早く a_0 に収束する。これは

$$A_{m,n} = a_0 + (-1)^n a_{n+1} x^{-n(n+1)/2} (x^m y_0)^{n+1} + O((x^m y_0)^{n+2})$$

である。

いまの例では、 $\sigma_m = 2^m \sin^2(\pi/2^m)$ は、 $y = (1/2^m)^2$ に対して、この形であり、 $m \in \mathbb{1}$ つまりことは、 $x = 1/4$ としたことに相当するから、順次の加速値の比は $1/4, 1/4^2, 1/4^3, \dots$ に近づき、上記の加速で、つぎつぎに主要項が消えてゆく。係数を評価すると、 $A_{n,n}$ の誤差は、ほぼ $2^{-n(n+1)}$ となる。番号がずれていることを考慮に入れると、内外接の円の平均から始めれば、正 2^n 角形までで $(n+1)(n+2)$ ビット ($n=10$ なら 132 ビット) 分は求められるはずなので、40 桁くらいはこれでだせる。

表 1 は単長 (仮数部 37 ビット) で求めたものであるが、倍長 (仮数部 74 ビット) で求めた結果を表 2 に示す。左

だし使用した計算機 (TOSBAC 3400) のF書式は、11桁しか精度がなく、D書式ではみづらゝいので、専用の印刷プログラム (毎回10倍して整数部をとる方式) を自家用に作り、表2はそれによつた。(1列に印刷したのを、切ってはりかえてある)。20桁しか印刷しなかつたが、たぶん最後の桁は、末位のビット近くまで正しく出てゐるはずである。

この計算は四則、平方根など基本的な演算だけからなり、130ビットくらいでも、10回の反復を求められるから、4倍長システムの検査用として、実用価値があるのではないかと考える。

§4. 教値積分による計算

答に π を含むような積分は、はなはだ多いから、教値積分で、その近似値を求めることもできるはずである。しかしこのとき、積分と積分公式の選択が重要である。

もっとも直接的なのは

$$(7) \quad \pi = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

であるが、 $x=1$ が特異点 ($|f'(1)| = \infty$) であるため、

ACCERALATION

(平均値にヒトダク)

4	外接 内接 平均	2	3	4	5	6	7
4	4.00000000000000000000 2.82842712474619009760 3.21895141649746006506	3.14065423154946672475 3.14158150010275391488 3.14159248963883330746 3.14159265106589837270 3.14159265355050291592 3.14159265358917939348	3.14159621865121652107 3.14159266407591444067 3.14159265362823276088 3.14159265358994108628 3.14159265358979381376	3.141592665013640344428 3.14159265358726143006 3.14159265358979091995 3.141592653533979323623	3.141592665359063470277 3.14159265358979339257 3.141592653589793236849	3.14159265358979318712 3.141592653589793236846	3.141592653533979626846
8	3.31370849898476039041 3.06146745892071817382 3.14554780560873224602						
16	3.18259787807452811058 3.12144515225805228557 3.14182939419687756057						
32	3.15172490742925609847 3.13654849054593926381 3.14160729617371154203						
64	3.14411833524590426274 3.14033115695475291231 3.14159356638513669579						
128	3.14222362994245684538 3.14127725093277286806 3.14159271060266752717						
256	3.14175036916896645910 3.14151380114430107632 3.14159265715252287058						

井 2

収束がはるはだ悪い。じつさにやってみると、シン普森
公式により、17分点で 3.13439...、1025分点で 3.1415786...
くらいにしか収まらない。積分域を 1/2 までとし

$$(8) \quad \pi = 6 \int_0^1 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} x \right] dx$$

とすると、65分点のシン普森公式で 3.141592653... まで求
められる。

(7) の端の特異点を消したり、変換したりする工夫も興味
深い。数値積分によるならば

$$(9) \quad \pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

とシン普森公式によるのがずっと早い。17分点で
3.1415926535... まででる。(9) は、たとえば [6] に示され
ているように、特性関数の零点が、被積分関数の極を打ち消し
ている特異な例だから、 π の計算にはよくても、数値積分の
例には不適切である。またシン普森公式の誤差が刻み長の
6乗 (小つうのように4乗でなく) に比例して減少するので、
10桁くらいはすぐにはでるが、20桁、30桁となると、容易では
ない。

π 自身ではないが、 $\sqrt{\pi}$ を求めるには

$$(10) \quad \sqrt{\pi} = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

を利用し、台形公式で求めるのが早いようである。刻み幅

0.5 で $x=7$ まで計算すると、17桁正しく求められる。しかもこのとき、 e^{-x^2} の値は、 $e^{-h^2} = a$ の値さえ求めれば、あとは漸化式で $a^4 = a \times a^3$, $a^9 = a^4 \times a^5$, ... を順次作ってゆけばよい。

π^2 , π^4 など直接に求めるには、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

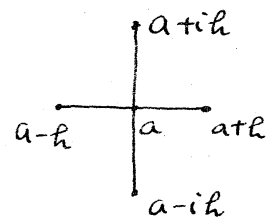
など1=加速をばどこすのも、手軽な方法である。

§5. 複素分点をもつ積分公式

Chebyshev の積分公式は、 $n=8$ および $n \geq 10$ のとき、複素分点をもつ。しかし複素分点関数が解析的なら、それでも使えるはずである。

[7] に 複素4点 (正しくは5点) 公式がでてくる。

$$\int_{a-h}^{a+h} f(t) dt = \frac{h}{15} [24 f(a)$$

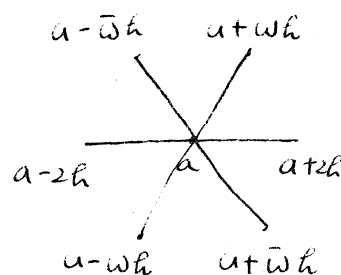


$$+ 4[f(a+h) + f(a-h)] - [f(a+ih) + f(a-ih)]$$

$$+ h f^{(6)} \cdot (2h)^6 / 168 \cdot 6! \quad \text{累積誤差 } h^6$$

このまねをして6点 (正しくは7点) 公式を作ることもできる。

$$\int_{a-2h}^{a+2h} f(t) dt = \frac{2h}{315} \left[540 f(a) \right. \\ \left. + 71 [f(a+h) + f(a-h)] \right. \\ \left. - (13 + 7\sqrt{3}i) [f(a+\omega h) + f(a-\omega h)] \right. \\ \left. - (13 - 7\sqrt{3}i) [f(a+\bar{\omega}h) + f(a-\bar{\omega}h)] \right] \\ - h f^{(8)}(4h)^8 / 9! \cdot 4^7 \quad \text{累乗誤差 } h^8$$



$$\omega = 1 + \sqrt{3}i$$

これらに $\int_0^1 \frac{4 dx}{1+x^2} = \pi$ に応用して得た結果を下記に示す。
 ただしこのプログラムは、複素数計算をなく、複積分関数の
 実部と虚部（の分子と分母）を別々の文関数に書き、すべて
 実数計算で、実数部のみを計算した。虚数部は互いにうすけ
 りあう。計算は $[0, 1]$ を何区間かに分け（つまりこれはプログラ
 ムの都合上 6点公式では $n/4$ 個、他は $n/2$ 個）、そのお
 のおのの小区間に上記の公式を使い、それを合計した。

表 3

$1/h = n$	4点	6点	SIMPSON (比較)
4	3.1416068375	3.1408969408	3.1415686274
8	3.1415927138	3.1415905153	3.1415925624
16	3.1415926543	3.1415926534	3.1415926511
32	3.1415926535	3.1415926536	3.1415926535

被積分関数の特異点 $\pm i$ が近すぎるせいか、誤差の入り方は、理論どおり $O(n^p)$ の形であるので、これに加速してもうまくない。6点公式によると、 $n=16$ で十桁であるが、この公式は複雑で、係数も大きく、实用価値は疑問である。

何よりも、複素分点を有する積分公式を特に使う意義、利点か、私にはまだまったくわからない。——

§6. おまひ

以上はまだ思いつき程度にすぎず、せいぜいシステムのテスト用にしかならなかったが、このへんに、数値解析の演習問題がたくさんありそうである。計算式の比較・選択にあたっては、たとえば10桁正しく求めるのに要する手間と、所要桁数が小えたときの手間の小え分とは、区別して考える必要があるだろうし、 π を10桁出すのに、どの方法がもっとも手間が少なか、まだはっきりしない。

Exeter (イギリス) での第2回国際数学教育会議 (1972年9月) の折に、アフリカの Grossman が、(7) と (9) との収束の早さの差が、数値計算教育のよい材料であると論じていた。 π の計算は、高校以下の計算教育のよい話題の一つとして、一つの試論をのべておきたい。

文 献

- [1] 一松 信, 教室に計算機をもちこもう. 第2部 3, 4
— 円周率 π の計算. 教学セミナー 1972年5月号
76-80 ; 6月号 48-52.
- [2] 藤原松三郎, 明治前日本数学史, 第二卷, 岩波
1956. — 第3章 建部賢弘.
- [3] 森口繁一, アルゴリズム漫歩-1. 円理論追試,
教学セミナー, 1964年4月号 16-21.
- [4] P. Henrici, Elements of Numerical Analysis, Wiley, 1964.
- [5] H. S. Wilf, Advances in numerical quadrature, — Mathematical
Methods for Digital Computers, II, 1967, Wiley, 133-144.
- [6] H. Takahasi & M. Mori, Error estimation in the numerical
integration of analytic functions, Report of the Computer
Centre, Univ. of Tokyo, 3 (1970), 41-108.
- [7] M. Abramowitz - I. A. Stegun ed., Handbook of Mathematical
Functions with formulas, graphs, and mathematical tables,
National Bureau of Standards, A. M. S. 55 (1964), (Dover 版の
廉価版もある) — §25.4.27, p.887.