数理解析研究所講究録
第177巻 1973年 1-13

Connesについて

奈良工専　　北川 誠之助

§1 序

ここでは、A. Connes の $T(M)$ に関する結果の一部を紹介します

記号：M, N : Neumann algebra

φ, ψ : M上の normal semi-finite faithful weight (又は state) 以下では weight (又は state) は全て normal semi-finite faithful なものとする

$\mathfrak{N}_\varphi = \{x \in M : \varphi(x^*x) < \infty\}$

$\mathfrak{M}_\varphi = \{x^*y : x, y \in \mathfrak{N}_\varphi\}$

σ_t^φ : φによる modular automorphism

$M_\varphi = \{x : \sigma_t^\varphi(x) = x\}$

§2

<u>定理 1</u>　φ, ψ : M上の weight

$\exists\, t \longmapsto u_t \in M_u$: strongly conti. mapping

$$\sigma_t^\psi(x) = u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^* \qquad \forall x \in M$$

証明　　$F_2 = \{2\times 2\text{-matrix}\}$ とする

$\theta(\sum x_{ij}\otimes e_{ij}) \overset{\text{def}}{=} \varphi(x_{11}) + \psi(x_{22})$　　$\sum x_{ij}\otimes e_{ij} \in (M\otimes F_2)_+$

$\mathfrak{M}_\theta \ni \sum x_{ij}\otimes e_{ij} \iff x_{i1} \in \mathfrak{M}_\varphi,\ x_{i2} \in \mathfrak{M}_\psi\ (i=1,2)$ より

θ が $M\otimes F_2$ の weight になる事は容易にわかる。

$f_j = 1\otimes e_{jj}\ (j=1,2)$ が $(M\otimes F_2)_\theta$ に含まれることを示す。

すなわち $\sigma_t^\theta(f_j) = f_j\ (j=1,2)$ を示す。

[1] により次の事を示せば十分である。

$f_j \mathfrak{M}_\theta \subset \mathfrak{M}_\theta,\quad \mathfrak{M}_\theta\cdot f_j \in \mathfrak{M}_\theta \quad (j=1,2)$

$\theta(f_j\cdot a) = \theta(a\cdot f_j) \qquad \forall a \in \mathfrak{M}_\theta\ (j=1,2)$

いずれも、容易に計算できるので、計算は省略する。

$\sigma_t^\theta(x\otimes e_{11}) = \sum x_{ij}\otimes e_{ij}$ とすると

$(1\otimes e_{11})\sigma_t^\theta(x\otimes e_{11}) = \sigma_t^\theta(x\otimes e_{11}) = \sigma_t^\theta(x\otimes e_{11})(1\otimes e_{11})$

$0 = (1\otimes e_{22})\sigma_t^\theta(x\otimes e_{11}) = \sigma_t^\theta(x\otimes e_{11})(1\otimes e_{22})$

より $\exists \sigma_t(x)\in M$　$\sigma_t^\theta(x\otimes e_{11}) = \sigma_t(x)\otimes e_{11}$ となる

$x \longrightarrow \sigma_t(x)$ = strongly conti. one-parameter group of automorphisms in M.

$x \longrightarrow \sigma_t(x)$ に関して，φ の K.M.S. 条件を満足することを示す。

$\varphi(\sigma_t(x^*x)) = \theta(\sigma_t^\theta(x^*x)\otimes e_{11}) = \theta(x^*x\otimes e_{11}) = \varphi(x^*x)\ \cancel{\otimes e_{11}}$.

$\forall a, b \in \mathfrak{M}_\varphi$

$\varphi(\sigma_t(a)b) = \theta(\sigma_t(a)b\otimes e_{11}) = \theta(\sigma_t^\theta(a\otimes e_{11})\cdot b\otimes e_{11})$

$\varphi(b\,\sigma_t(a)) = \theta(b\otimes e_{11}\cdot \sigma_t^\theta(a\otimes e_{11}))$

σ_t^θ が θ に関する K.M.S 条件を満たすことより

${}^\exists F(z)$: bdd analytic $0<\mathrm{Im}\,z<1$, & conti $0\le \mathrm{Im}\,z\le 1$

$F(t)=\theta(\sigma_t^\theta(a\otimes e_{11})\,b\otimes e_{11}) = \varphi(\sigma_t(a)\,b)$

$F(t+i)=\theta(b\otimes e_{11}\cdot \sigma_t(a\otimes e_{11}))=\varphi(b\,\sigma_t(a))$

したがって K.M.S 条件の一意性により

$$\sigma_t(x) = \sigma_t^\varphi(x) \qquad \forall x\in M.$$

$$\therefore\ \sigma_t^\theta(x\otimes e_{11}) = \sigma_t(x)\otimes e_{11} = \sigma_t^\varphi(x)\otimes e_{11}$$

同様に $\sigma_t^\theta(x\otimes e_{22}) = \sigma_t^\psi(x)\otimes e_{22} \qquad \forall x\in M.$

$$(1\otimes e_{22})\,\sigma_t^\theta(1\otimes e_{21}) = \sigma_t^\theta(1\otimes e_{21}) = \sigma_t^\theta(1\otimes e_{21})(1\otimes e_{11})$$

$$0=(1\otimes e_{11})\,\sigma_t^\theta(1\otimes e_{21}) = \sigma_t^\theta(1\otimes e_{21})\,1\otimes e_{22}$$

より $\sigma_t^\theta(1\otimes e_{21}) = u_t\otimes e_{21} \quad u_t\in M.$ となり

$$u_t^* u_t\otimes e_{11} = \sigma_t^\theta(1\otimes e_{11}) = 1\otimes e_{11}$$

$u_t u_t^*\otimes e_{22} = \sigma_t^\theta(1\otimes e_{22}) = 1\otimes e_{22}$ より. u_t は unitary operator.

$$(u_t\otimes e_{21})(\sigma_t^\varphi(x)\otimes e_{11})(u_t^*\otimes e_{12}) = \sigma_t^\theta(1\otimes e_{21})\sigma_t^\theta(x\otimes e_{11})\sigma_t^\theta(1\otimes e_{12})$$

$$= \sigma_t^\theta(x\otimes e_{22}) = \sigma_t^\psi(x)\otimes e_{22}$$

$$\therefore\ u_t\,\sigma_t^\varphi(x)\,u_t^* = \sigma_t^\psi(x) \qquad \forall x\in M. \qquad \text{q.e.d}$$

定理1で求めた u_t を $(D\psi : D\varphi)_t$ と書く.

$(D\psi, D\varphi)_t$ は次の様な性質を持つ.

Lemma 1) ~~φ~~ $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi$: weight

i) $(D\varphi_1 : D\varphi_2)_t(D\varphi_2 : D\varphi_3)_t = (D\varphi_1 : D\varphi_3)_t.$

ii) $\psi = \sigma_t^{\varphi}$- invariant weight

[1] より $\exists h \eta M^{\varphi}$ $h \geq 0$

$\psi(x) = \varphi(hx)$ と表わされるが

$(D\psi : D\varphi)_t = h^{it}$ となる.

iii) $u \in M_u$ $\varphi_u \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi(u x u^*)$

$\sigma_t^{\varphi}(u) = u(D\varphi_u : D\varphi)_t$

(A) iv) $(D\psi : D\varphi)_{t_1+t_2} = (D\psi : D\varphi)_{t_1} \sigma_{t_1}^{\varphi}((D\psi : D\varphi)_{t_2})$

証明はいずれも簡単に計算出来るので、略する。

今度は、逆に $(D\psi : D\varphi)_t$ は(A)により characterization される事を示す。

<u>定理2</u> $t \longrightarrow u_t \in M_u$: strongly conti mapping

(A)を満たす すなわち $u_{t_1+t_2} = u_{t_1} \sigma_{t_1}^{\varphi}(u_{t_2})$ ならば

$\exists_1 \psi$: weight s.t. $(D\psi : D\varphi)_t = u_t$

証明[~~first~~ step I] $F_\infty \overset{\mathrm{def}}{=} B(L^2(R^1))$ [1] により、次の事が解かっている。

$\exists \omega$ = weight on F_∞ s.t. $\sigma_t^{\omega}(X) = U_t X U_t^*$ $(U_t f)(s) = f(s-t)$ $\forall f \in L^2(R)$

$\bar{\omega} \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi \otimes \omega$: weight on ~~$F_\infty \otimes M$~~ $M \otimes F_\infty$

$\exists V \in (M \otimes F_\infty)_u$ s.t. $u_t \otimes 1 = V \sigma_t^{\bar{\omega}}(V^*)$ なる事を示す。

$I : \mathfrak{H}_\varphi \otimes L^2(R^1) \ni \xi \otimes f \longrightarrow f(t)\xi \in L^2(R, \mathfrak{H}_\varphi)$

により、$\mathfrak{H} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{H}_\varphi \otimes L^2(R^1)$ と $L^2(R, \mathfrak{H}_\varphi)$ を同一視する

$$W: L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_\varphi) \ni \xi_t \longrightarrow \pi_\varphi(u_t)\xi_t \in L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_\varphi)$$

W = unitary operator で $I^{-1}WI \in \pi(M \otimes F_\infty)$ なる事は容易に解かる。

$^\exists V$: unitary $\in M \otimes F_\infty$ s.t $(\pi_\varphi \otimes 1)(V) = I^{-1}WI$

V が求めるものであることは、容易に計算出来る。

[step II] i) $\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\omega}(V^* x V)$ = weight on $M \otimes F_\infty$

$\sigma_t^\Phi(x \otimes y) = u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^* \otimes \sigma_t^\omega(y) \quad \forall x \in M, \forall y \in F_\infty$

ii) $a \in F_\infty$, $a > 0$ $\omega(a) < \infty$ とする.

$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(x \otimes a) \qquad x \in M_+$ とすると.

ψ = weight on M

証明 i) Lemma 1)より

$$\sigma_t^\Phi(x \otimes y) = V \sigma_t^{\overline{\omega}}(V^*) \sigma_t^{\overline{\omega}}(x \otimes y) \sigma_t^{\overline{\omega}}(V) V^* = (u_t \otimes 1) \sigma_t^{\overline{\omega}}(x \otimes y)(u_t^* \otimes 1)$$
$$= (u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^*) \otimes \sigma_t^\omega(y)$$

ii) $\forall x \in M_+$. $\varphi(x) < \infty$

$b \stackrel{\text{def}}{=} \int f(t) u_t dt$ とすると $\psi(b x b^*) < \infty$ なる事を示す.

但し. $f \in L^1 \quad \hat{f} \in C_0$

$$\psi(b x b^*) = \overline{\omega}(V^*(b x b^* \otimes a) V) = \overline{\omega}(V^*(b \otimes 1)(x \otimes a)(b^* \otimes 1) V)$$

[1] により

$\overline{\omega}(V^*(b \otimes 1)(x \otimes a)(b^* \otimes 1) V) < \infty$ を示すには.

$V^*(b \otimes 1)$ が $\sigma_t^{\overline{\omega}}$- analytic を示せば十分.

$$V^* \int f(t)(u_t \otimes 1) dt = V^* \int f(t) V \sigma_t^{\overline{\omega}}(V^*) dt = \int f(t) \sigma_t^{\overline{\omega}}(V^*) dt.$$

$\therefore$ $\hat{f} \in \mathcal{C}_0$ より　　$V^*(b \otimes 1)$ は $\sigma_t^{\tilde{\psi}}$ - analytic

$\mathfrak{n}_{\psi b} \subset \mathfrak{n}_\psi$　で，$f \in L^1$, $\hat{f} \in \mathcal{C}_0$ を動かすから

$\mathfrak{n}_\psi$: weakly dense

$\therefore$ ψ - semi-finite.

ψ normal, faithful なことは明らかだから，

ψ は M の上の weight.

step III). M, N : Neumann algebras

Φ = weight on $M \otimes N$ として，

$$\sigma_t^\Phi(M \otimes 1) = M \otimes 1$$

$a \in N_+$　$\psi(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \Phi(x \otimes a)$ が weight on M とすると

$$\sigma_t^\psi(x) \otimes 1 = \sigma_t^\Phi(x \otimes 1) \qquad \forall x \in M$$

証明.

lemma 2　$\mathbb{C} \ni z \longrightarrow x(z) \in M$: analytic

φ : weight on M.

$\exists x \in M$: ~~analytic~~ σ_t - analytic

$$\sigma_z(x) = x(z)$$

$\Longleftarrow$　i) $\forall r_1 > 0$　$\exists r_2 > 0$　s.t

$|\mathrm{Im}\, z| < r_1$　$a \in \mathfrak{m}_\varphi^+ \Rightarrow \varphi(x(z) a x(z)^*) \leq r_2\, \varphi(a)$

$\varphi(x^*(z) a x(\bar{z})) \leq r_2\, \varphi(a)$

ii) $\forall a \in \mathfrak{m}_\varphi^+$　$\left.\begin{array}{l} z \longrightarrow \varphi(x(z) a) \\ z \longrightarrow \varphi(a x(z)) \end{array}\right\}$ holomorphic

$$\varphi(x(z+i)a) = \varphi(a\,x(z))$$

Lemmaの証明は可能である

$\gamma_t(x)\otimes 1 \overset{\mathrm{def}}{=} \sigma_t^{\Phi}(x\otimes 1)$ $\forall x\in M$ $\gamma_t(x)$は strongly conti one-parameter group of automorphisms

$\{\int f(t)\sigma_t^{\Phi}(x\otimes 1)\,dt : {}^{\forall}x\in M,\ f\in L^1,\ \hat{f}\in C_0\}$: weakly dense in $M\otimes 1$

より $\{\gamma_t$- analytic element$\}$は weakly dense in M.

$\{\gamma_t$- analytic element$\}\ni{}^{\forall}x$

$x \longrightarrow \gamma_z(x)$は Lemma 2)を満たすから

$\gamma_t(x) = \sigma_t^{\varphi}(x)$ $\ni$. $\{\gamma_t$- analytic element$\}$ weakly dense

より $\gamma_t(x) = \sigma_t^{\varphi}(x)$ $\forall x\in M$.

Step IV) 以上の事をまとめると

$\exists\,\Psi$ $\sigma_t^{\Psi}(x) = u_t\,\sigma_t^{\varphi}(x)\,u_t^*$

$(D\psi : D\varphi)_t = V_t$ $a_t = u_t V_t^* \in$ center of M_φ

$a_{t_1+t_2} = a_{t_1}\cdot a_{t_2}$ より

${}^{\exists}h \in M$ center of M $a_t = h^{it}$ $h \geq 0$

Lemma 1 より $(D\psi(h\,\cdot\,), D\psi) = h^{it} = a_t$

$\therefore\ (D\psi(h\,\cdot\,) : D\varphi) = (D\psi(h\,\cdot\,) : D\psi)(D\psi : D\varphi) = h^{it}\cdot V_t$

$= a_t V_t = u_t$. q.e.d

§3. Def $T(M)=\{T_0\in R:\ {}^\exists\varphi\quad \sigma_{T_0}^{\varphi}=1\}$

定理 3 i) $T_0\in T(M)$

ii) $\forall\varphi$ $\sigma_{T_0}^{\varphi}$: inner

iii) $\forall\varphi\Rightarrow {}^\exists u$ = unitary $\in$ center of M_φ s.t. $\sigma_{T_0}^{\varphi}(x)=uxu^*$

iv) $\forall\varphi$, ${}^\exists\psi$ s.t. $\psi(x)=\varphi(h.x)$

但し h は center of M_φ, $h\geq 0$

$\sigma_{T_0}^{\psi}=1$

v) ${}^\exists\varphi$ $\sigma_{T_0}^{\varphi}$: inner

i)〜v) は同値

証明) 定理1) より次の事は明らかである。

iv)$\Rightarrow$i)$\Rightarrow$ii)$\Rightarrow$v)$\Rightarrow$ii)

ii)$\Rightarrow$iii) $\forall\varphi$ に対して $\sigma_{T_0}^{\varphi}$ = inner, ${}^\exists u\in M$ s.t. $\sigma_{T_0}^{\varphi}(x)=uxu^*$

φ は $\sigma_{T_0}^{\varphi}$- invariant だから $\varphi(uxu^*)=\varphi(x)$ $\forall x\in M_+$

$\therefore\ \eta_\varphi u\subset\eta_\varphi$ $\eta_\varphi u^*\subset\eta_\varphi$

$\therefore\ u\mathfrak{m}_\varphi\subset\mathfrak{m}_\varphi$. $\mathfrak{m}_\varphi u\subset\mathfrak{m}_\varphi$,

$\forall x\in\mathfrak{m}_\varphi$ $\varphi(ux)=\varphi(xu)$

[1] により $u\in M_\varphi$ & $\sigma_{T_0}^{\varphi}(x)=uxu^*=x$ $\forall x\in M_\varphi$

より, $u\in$ center of M_φ

iii)$\Rightarrow$iv) u = implement $\sigma_{T_0}^{\varphi}$

h は center of M_φ, $h\geq 0$

$u=h^{-iT_0}$

$\psi \overset{\text{def}}{=} \varphi(h\,\cdot\,)$

Lemma 1 より $\sigma_t^{\psi}(x) = h^{it_0}\sigma_t^{\varphi}(x)h^{-it_0}$

$\therefore\ \sigma_{T_0}^{\psi}(x) = x$

今まで知られているKallman [3], Takesaki[2] 等の結果を使って次の様な事がわかる。

<u>定理4</u>　i)　M : semi-finite $\Longrightarrow T(M)=R$

ii)　特に M_* : separable ならば

M : semi-finite $\Longleftrightarrow T(M)=R$

§4

以下では具体的なMに関してT(M)を計算する。

I)　$M = \bigotimes_{\nu=1}(M_\nu, \varphi_\nu)$　　M_ν : factor　φ_ν : state

= <u>定理5</u>　$T_0 \in T(M) \Longleftrightarrow$ i) $\bigcap T(M_\nu) \ni T_0$

ii) $\sigma_{T_0}^{\varphi_\nu}(x) = u_\nu x u_\nu^*$

$\Longrightarrow \sum 1 - |\varphi_\nu(u_\nu)| < \infty$

証明 ($\Rightarrow$)　まずKallman [B4] の結果を述べておく。

$\alpha = \alpha_1 \otimes \alpha_2 : M_1 \otimes M_2$: automorphism : inner $\Longleftrightarrow \alpha_i$: inner $i=1,2$

GNS construction により $\varphi_\nu(x) = (x\Omega_\nu, \Omega_\nu)$ として

以下では $M = \bigotimes_{\nu=1}(M_\nu, \Omega_\nu)$ について論じる, $\varphi = \bigotimes_{\nu=1}\varphi_\nu$ とすると

$\sigma_t^{\varphi}(x) = \bigotimes_{\nu=1}\sigma_t^{\varphi_\nu}$ なる事とKallmanの結果を使うと

$T_0 \in T(M) \Longrightarrow T_0 \in \bigcap_{\nu=1} T(M_\nu)$　は明らかである。

ii) U : implement $T_{T_0}^{\varphi}$

$\{\prod_{\nu\in J}\otimes x_\nu\Omega_\nu\otimes\prod_{\nu\notin J}\otimes\Omega_\nu : J$: finite set, $x_\nu\in M_\nu\}$: dense in $\prod_\nu(\mathfrak{H}_\nu,\Omega_\nu)$

$^\exists J_0$: finite set $\quad C=|(U\overset{\otimes}{\prod_{\nu}}\Omega_\nu,\prod_{\nu\in J_0}\otimes x_\nu\Omega_\nu\otimes(\prod_{\nu\notin J_0}\Omega_\nu))|\neq 0\ \cdots\ (1)$

$J_0\subset{}^\forall J$: finite $\qquad T_{T_0}^{\varphi}=\prod_{\nu\in J}\otimes T_{T_0}^{\varphi_\nu}\otimes\prod_{\nu\notin J}\otimes T_{T_0}^{\varphi_\nu}$

Kallman の結果により、$^\exists U_\nu$: implement $T_{T_0}^{\varphi_\nu}$ $\nu\in J$

V_J : implement $\otimes\prod_{\nu\notin J}\otimes T_{T_0}^{\varphi_\nu}$ 又、M が factor なる事

より $^\exists\lambda_J\in\mathbb{C}$, $U=\lambda_J(\prod_{\nu\in J}\otimes U_\nu)\otimes V_J$

(1) より $\quad 0<C=\prod_{\nu\in J_0}|(U_\nu\Omega_\nu,x_\nu\Omega_\nu)||(V_J\overset{\otimes}{\prod_{\nu\notin J}}\Omega_\nu,\Omega_\nu)|\prod_{\nu\in J/J_0}|(U_\nu\Omega_\nu,\Omega_\nu)|$

$|(V_J\overset{\otimes}{\prod_{\nu\notin J}}\Omega_\nu,\Omega_\nu)|\leq 1,\ \prod_{\nu\in J/J_0}|(U_\nu\Omega_\nu,\Omega_\nu)|\leq 1$ より

$\prod_{\nu\in J/J_0}|(U_\nu\Omega_\nu,\Omega_\nu)|$ converge as $J/J_0\uparrow\infty$

$\therefore\ \sum 1-|(U_\nu\Omega_\nu,\Omega_\nu)|=\sum 1-|\varphi_\nu(U_\nu)|<\infty$

($\Leftarrow$) 明らか $\qquad$ q.e.d

特に M が I.T.P.F.I について上の結果を使うと

$M=\overset{\infty}{\otimes}(M_\nu,\Omega_\nu)\qquad Sp(M_\nu,\Omega_\nu)=\{\lambda_{\nu_1}\leq\cdots\leq\lambda_{\nu_n}\}$

$$h_\nu\overset{def}{=}\begin{pmatrix}\lambda_{\nu_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{\nu_n}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\ \varphi_\nu(x)=(x\Omega_\nu,\Omega_\nu)=T_\nu(hx)$ より $T_t^{\varphi_\nu}(x)=h^{it}xh^{-it}$

$T_0\in T(M)\iff\sum 1-|\sum_{i=1}\lambda_{\nu_i}^{1+iT_0}|<\infty$

例 $Sp(M_\nu,\Omega_\nu)=\{p,q\}$ ならば

$T(M)=\{nT_0 : n\in\mathbb{Z}\}\quad\exp(-2\pi/T_0)=\lambda$

G_2 : 2-generator を持つ free group とし $U(G_2)$ を ~~l~~ regular

rep より出来る II_1-factor とする。

$T(L(G_2)\otimes M_*) = T(M)$ より

non-hyper-finite III-型-factor が非可算無限個の存在の証明となる

II) μ : σ-finite measure on Ω.

$\mathcal{G}$: bijection, bimeasurable transformation の subgr.

$\mathcal{G}$ は Ω に μ に関して free に act しているものとする

$L^\infty(\Omega,\mu) \ni {}^\forall f$. $\quad s\cdot f \overset{def}{=} f\circ s^{-1} \quad s\in\mathcal{G}$

$W^*(\mathcal{G},\Omega) \overset{def}{=}$ $\mathcal{G}$ と $L^\infty(\Omega,\mu)$ の cross product.

定理6 $T_0 \in T(W^*(\mathcal{G},\Omega)) \iff {}^\exists\nu$: posit. measure on Ω

s.t. $\nu\sim\mu$, $(ds^{-1}\nu/d\nu)(\omega)\in\{\rho^n, n\in\mathbb{Z}\}$ $\quad \rho=\exp(-2\pi/T_0)$

$\forall s\in\mathcal{G} \quad \omega\in\Omega$

Proposition 1

N : semi-finite subalgebra of M.

$E : M \longrightarrow N$: normal faithful conditional expectation

$\mathcal{N}(E) \overset{def}{=} \{u = E(uxu^*) = uE(x)u^*, \ \forall x\in M\} \subset M_u$

$C = N'\cap M \subset N$,

$\mathcal{G}$: $\mathcal{N}(E)$ の subgroup で $M=\{N,\mathcal{G}\}''$ とする

τ : trace on N

${}^\forall v\in\mathcal{G} \quad {}^\exists f_{v,\tau}\geq 0,\ f_{v,\tau}\,\eta\, C \quad$ s.t. $\tau(vxv^*)=\tau(f_{v,\tau}x)\ {}^\forall x\in N_+$

以下の i)～iii) は同値

i) $T_0\in T(M)$

ii) $\forall \tau$: trace, $\exists V \in C_u$ s.t. $\forall u \in \mathcal{G}$ $u^* V u V^* = \rho_{u,\tau}^{iT_0}$

iii) $\exists \tau$ = trace, s.t. $\rho_{u,\tau}^{iT_0} = 1$ $\forall u \in \mathcal{G}$.

証明略

Proposition 2. [Zeller Meier [7]]

$\mathfrak{A}$: Neumann algebra

$\mathcal{G}$: discrete group of automorphisms on $\mathfrak{A}$.

$M = W^*(\mathcal{G}, \mathfrak{A})$ - ($\mathcal{G}$ と $\mathfrak{A}$ の cross product)

i) $I : a \longrightarrow (I(a))_{t,u} = \delta_t^u\, t^{-1} a \in M$

$I : \mathfrak{A} \longrightarrow I(\mathfrak{A}) = N \subset M$: isomorphism

ii) $E : a \in M \longrightarrow (I(a_{e,e}))$: normal faithful conditional expectation on N

iii) $\forall s \in \mathcal{G} \xrightarrow{U_s} U_s \in M$. $(U_s)_{t,u} \overset{def}{=} \delta_t^{su}$: isomorphism

$M(E) \supset \{U_s : s \in \mathcal{G}\} \cong \mathcal{G}$. $\mathcal{G} \Longrightarrow M = \{N, \mathcal{G}\}''$

iv) $s \in \mathcal{G}$ $x \in \mathfrak{A}$ $U_s I(x) U_s^* = I(s \circ x)$

証明略

定理の証明

$\forall \tau$: trace on $N = I(L^\infty(\Omega, \mu))$ に対して

$\exists \nu$: measure on Ω s.t. $\nu \sim \mu$

$\tau_\nu(I(f)) = \int f(\omega)\, d\nu(\omega)$ $\forall f \in L^\infty(\Omega, \mu)_+$

$\forall x \in N_+$, $\forall s \in \mathcal{G}$ に対して $\tau_\nu(U_s x U_s^*) = \tau_{s^{-1}\nu}(x) = \int x(\omega)\, d(s^{-1}\nu)(\omega)$

したがって Proposition 1) iii) により.

$\exists\ \tau$: trace on N. s.t $\rho_{s,\nu}^{i\tau_0}(\omega) = 1$

$$\backslash\ \tau(U_s \Pi(X) U_s^*) = \int X(\omega)\, d(s^{-1}\nu)(\omega) = \int \rho_{s,\nu}(\omega) X(\omega)\, d\nu(\omega) \qquad \forall X \in L^\infty(\Omega,\mu)_+$$

$$\rho_{s,\nu}(\omega) = \left[\frac{ds^{-1}\nu}{d\nu}\right](\omega)$$

q.e.d.

Reference

[1] Takesaki - Pederson : The Radon-Nikodym-theorem for Von Neummans algebras (To appear)

[2] Takesaki : Tomita's theory and its application.

[3] Kallman : Groups of inner automorphism of Von Neuman algebras. Jour. of fun. Analysis '71'

[4] Kallman : A generalisation of free action. Duke. Math. J. 36, 1969.

[5] A. Connes : Doctor theis.

[6] A. Connes Groupe modulaire d'une algebras de von Neumann. C.R. Acad Sci '72

[7] G. Zeller Meier : Produit croisé d'une C*-algebra par un groupe d'automorphisms. J Math pure et appl '68