数理解析研究所講究録
第184巻 1973年 12-28

ステファン問題の差分解法

京大工　野木達夫

§1　序

ステファン問題の古典的な解の存在と一意性については数多くの結果が知られている。その殆んどのものは，考えているステファン問題を同等な Volterra 型積分方程式の問題に帰着させて解決している．その際，解の構成は積分方程式に対する逐次近似法を用いて行われるので，近似解を求める方法も与えていると言える。しかしこの方法が全領域での時間的変化を数値計算するのに都合よい方法とは言えない。

それに代るものとして差分解法が開発されてきた。原形は Douglas and Gallie [1] にみられる。ここでは，ステファン条件を同等な積分恒等式に置きかえたもの（Evans [2]）を使用することがポイントになっている。その意味で完全に局所化された近似式を用いたことになっていない。しかもこの置きかえは Green の公式によっているため，壁側の条件がノイマン型に限られる。使い方からわかることは，更に断熱条件は除かれてしまう．

ここでは，ディリクレ条件や，断熱条件の場合にも適用可能な完全に局所化された差分解法を提案する．この方法の新しいポイントは，ステファン条件の中に，全く計算のための

人工的な熱流項を導入することにある。

§2. 取り扱う問題

我々は次の問題を考える： 方程式及び境界条件

(2.1) $$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad 0<x<y(t),\ t>0\quad (a\text{は定数})$$

(2.2) $$u(0,t)=f(t),\quad f(t)\leqq 0,\ t>0$$

(2.3) $$u(x,0)=\varphi(x),\quad \varphi(x)\leqq 0,\ 0\leqq x\leqq l,\ \varphi(l)=0,\ l>0$$

(2.4) $$u(y(t),t)=0,\quad t>0,\ y(0)=l$$

(2.5) $$K\frac{\partial u}{\partial x}(y(t),t)=\dot{y}(t),\ t>0\quad (K\text{は定数})$$

（ステファン条件）

をみたす $u(x,t)$ と自由境界 $x=y(t)$ を求めること．ここでは水が凍っていくモデルを取り扱ったということから，物理的に自然な条件 $f(t)\leqq 0$, $\varphi(x)\leqq 0$ が付けられている。

この問題の解の存在と一意性，並びに関数 $x=y(t)$ の単調増大性の証明は，Friedman [3] が与えている。この証明で欠かせない制約は $l>0$ となることである。我々の差分解法でもこの条件は欠かせない。

§3 差分解法

1.1

上半平面 $-\infty<x<\infty$, $t>0$ を直線

$$x=x_j=jh \quad (j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$t=t_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

でできる格子で被うものとする. h が空間方向の格子間隔で位置に関して一様とする. 一方時間ステップ

$$k_n=t_n-t_{n-1}$$

は n の変数とする. いま h として

$$\frac{l}{h}=J\ (\text{整数})$$

となるものをとり,

$$x=y_n\equiv x_{J+n} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

が自由境界となるように $\{k_n\}$ が定められるものと考える.

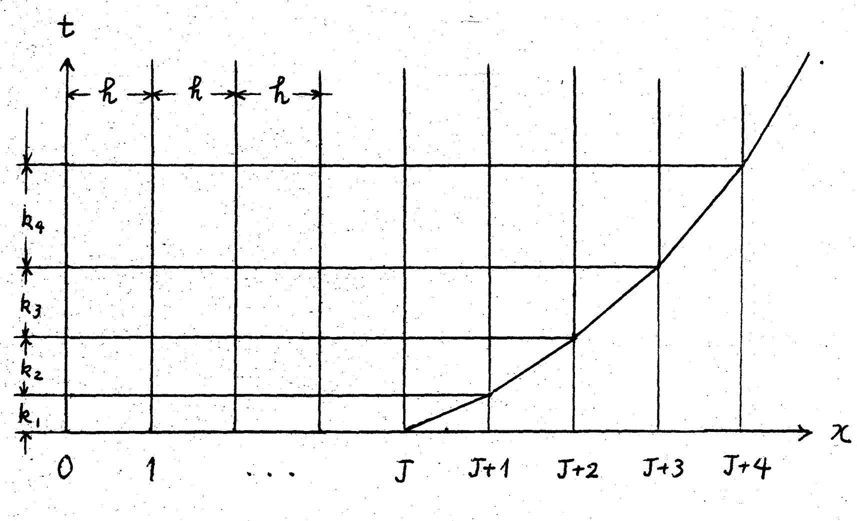

図-1

問題 (2.1) 〜 (2.5) をこの差分領域上で次の問題で置き換え

3：差分方程式系

(3.1) $a^2 u_{x\bar{x}}(x_j, t_n) - u_{\bar{t}}(x_j, t_n) = 0$, $j=1,2,\cdots,J+n$, $n=1,2,\cdots$

(3.2) $u(0, t_n) = f(t_n)$, $n=1,2,\cdots$

(3.3) $u(x_j, 0) = \varphi(x_j)$, $j=0,1,2,\ldots,J$

(3.4) $u(y_n, t_n) = 0$, $y_n = x_{J+n}$, $n=0,1,2,\ldots$

(3.5) $K v(t_n) + \frac{\beta}{\sqrt{h}} k_n = \frac{h}{k_n}$, $v(t_n) = u_{\bar{x}}(y_n, t_n)$, $n=1,2,\cdots$

をみたす $\{u(x_j, t_n)\}$ 及び $\{k_n\}$ を求めること．ただし

$$u_{x\bar{x}}(x_j, t_n) = \frac{1}{h^2}\left[u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)\right],$$

$$u_{\bar{t}}(x_j, t_n) = \frac{1}{k_n}\left[u(x_j, t_n) - u(x_j, t_{n-1})\right] \text{(※)},$$

そして β は後で定められる適当に大きな正定数である．

ステファン条件 (2.5) に代る式 (3.5) において 項 $\frac{\beta}{\sqrt{h}} k_n$ が人工的に附加した熱流項である。$\frac{\beta}{\sqrt{h}} k_n$ をつけてない式が (2.5) 式を形式的に近似していることは明白であるが，(3.5) 式でも (2.5) 式を形式的に近似している．実際 (3.5) 式を k_n

---

※) 後で，前進差分商 $u_x(x_j, t_n) = \frac{1}{h}[u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)]$，後退差分商 $u_{\bar{x}}(x_j, t_n) = \frac{1}{h}[u(x_j, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)]$ などの記号も用いる．

について解けば

$$(3.6)\quad k_n = \frac{\sqrt{h}}{2\beta}\left[-\kappa v(t_n) + \sqrt{\kappa^2 v(t_n)^2 + 4\beta\sqrt{h}}\,\right] \quad (*)$$

となり，これより

$$(3.6)'\quad \frac{h}{k_n} = \frac{1}{2}\left[\kappa v(t_n) + \sqrt{\kappa^2 v(t_n)^2 + 4\beta\sqrt{h}}\,\right].$$

ここで $h\to 0$ とすれば，

$$\lim \frac{h}{k_n} = \lim \kappa v(t_n).$$

左辺が $\dot{y}(t)$ に，右辺が $\kappa\frac{\partial u}{\partial x}(y(t),t)$ に対応すべきものであり，これは (3.5) 式が (2.5) 式を形式的に近似していることを意味する．

系 (3.1)～(3.5) を時間ステップを追って解いていくため．$t=t_n$ で次のような Iteration scheme を採用する：

$$(3.7)\quad a^2 u^{(s)}_{x\bar{x}}(x_j,t_n) - \frac{u^{(s)}(x_j,t_n) - u(x_j,t_{n-1})}{k_n^{(s)}} = 0,$$

$$j=1,2,\cdots,J+n-1$$

$$(3.8)\quad u^{(s)}(0,t_n) = f(t_n)$$

$$(3.9)\quad u^{(s)}(y_n,t_n) = 0$$

---

*) 条件 $f,\varphi\leq 0$ より $u(x_j,t_n)\leq 0$ が従い（最大値原理），条件 (3.4) とあわせて，$v(t_n)\geq 0$ をうる．従って (3.6) 式より $k_n>0$ が定まる．

$$(3.10)\quad k_n^{(s+1)} = \frac{\sqrt{h}}{2\beta}\left[-K v^{(s)}(t_n) + \sqrt{K^2 v^{(s)}(t_n)^2 + 4\beta\sqrt{h}}\right]$$

$s = 1, 2, 3, \cdots$

$$(3.11)\quad k_n^{(1)} = k_{n-1}$$

次のことが証明される：

定理　$f(t) \in C^1 \ (0<t<T)$，$\varphi(x) \in C^2 \ (0<x<l)$，$\varphi(l) = 0$ とする．このとき，

i) 各ステップ $t = t_n$ で Iteration scheme $(s = 1, 2, 3, \cdots \to \infty)$ は収束し 極限値 $\{u(x_j, t_n)\}$，k_n は方程式 (3.1)，(3.2) (3.4)，(3.5) をみたす．

ii) 系 (3.1)～(3.5) の解 は，$h \to 0$ のとき もとの系 (2.1)～(2.5) の解に一様収束する．(*)

このことを証明するために次節で，差分方程式 (3.1) に対するグリーン関数及び基本公式を準備する．

§4　基本公式及びグリーン関数の評価

差分方程式 (3.1) の右半平面 $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ における第2種

(*) 境界についても $\{y_n, t_n\}$ を結んでできる折線関数 $y_h(t)$ が $h \to 0$ とともに もとの問題の自由境界 $y(t)$ に一様収束することを意味する．

境界値問題のグリーン関数 $G(x_r, \xi_j; t_n, \tau_p)$ を式

$$(4.1)_1 \quad G(x_r, \xi_j, t_n, \tau_p) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi h}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{q=p+1}^{n} \Lambda_q^{-1}\left[e^{-i(r-j)\omega} + e^{-i(r+j-1)\omega}\right] d\omega & (n>p) \\ \dfrac{1}{h}\,\delta_{r,j}\ ,\ r, j > 0 & (n=p) \end{cases} \quad (*)$$

$$(4.1)_2 \quad \Lambda_q = 1 + 4\lambda_q \sin^2\frac{\omega}{2}\ , \qquad \lambda_q = \frac{a^2 k_q}{h^2}$$

によって定義する．これは，変数 (x_r, t_n) の関数として方程式及び境界条件

$$a^2 G_{x\bar{x}} - G_{\bar{t}} = 0\ , \qquad G_x(0, t_n) = 0$$

を満足し，(ξ_j, τ_p) の関数として

$$a^2 G_{\xi\bar{\xi}} + G_{\tau} = 0\ , \qquad G_{\xi}(0, \tau_n) = 0$$

を満足している．

<u>補助定理 1</u>.（基本公式）差分方程式系 (3.1)～(3.4) の解に対して関係式

$$(4.2) \quad v(t_n) = \left[1 + a^2 k_n G_{\xi}(y_n, \eta_n; t_n, \tau_{n-1})\right]^{-1} \times \quad (**)$$
$$\times \Big[(\varphi(0) - f(0))\, G(y_n, 0; t_n, 0)$$
$$+ \sum_{j=1}^{J} h\, G(y_n, \xi_j; t_n, 0)\, \varphi_{\bar{\xi}}(\xi_j) -$$

*) $\delta_{r,j} = 1\ (r=j),\ = 0\ (r \neq j)$, **) $\eta_n = \xi_{J+n}$,

$$-\sum_{p=1}^{n} k_p\, G(y_n, 0\,;\, t_n, \tau_{p-1})\, f_\tau(\tau_p)$$

$$-a^2 \sum_{p=1}^{n-1} k_p\, G_\xi(y_n, \eta_p\,;\, t_n, \tau_{p-1})\, v(\tau_p)\Big],$$

特に

(4.3) $$v(t_n) = \left[1 + a^2 k_n G_\xi(y_n, \eta_n\,;\, t_n, \tau_{n-1})\right]^{-1} \times$$

$$\times \Big[\sum_{j=1}^{J+n-1} h\, G(y_n, \xi_j\,;\, t_n, \tau_{n-1})\, u_\xi(\xi_j, \tau_{n-1})$$

$$-k_n G(y_n, 0\,;\, t_n, \tau_{n-1})\, f_\tau(\tau_n)\Big]$$

が成りたつ.

これらの式を導くには，互いに共役な方程式 $a^2\varphi_{\xi\xi} - \varphi_\tau = 0$ と $a^2\psi_{\xi\xi} + \psi_\tau = 0$ の解がみたす，いわゆる，Riemann の公式を導き，そこで $\varphi(\xi_j, \tau_p) = u(\xi_j, \tau_p)$，$\psi(\xi_j, \tau_p) = g(x_r, \xi_j\,;\, t_n, \tau_p)$ ($j>0$ に対する第1種境界値問題のグリーン関数）とおけば，$u(x_r, t_n)$ の表示を得，これより $v(t_n) = u_x(y_n, t_n)$ の表示 (4.2) を得る.

補助定理 2　十分小さな h に対して

(4.4) $$1 + a^2 G_\xi(y_n, \eta_n\,;\, t_n, \tau_{n-1}) > \frac{1}{4}$$

補助定理 3

(4.5) $$|G(y_n, 0\,;\, t_n, \tau_{p-1})| < \frac{1}{a\sqrt{t_n - \tau_{p-1}}}$$

補助定理4　$p \leqq n-1$ に対して

(4.6)　$$\frac{1}{\pi h^2}\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{g=p}^{n}\Lambda_g^{-1}\sin^2\frac{\omega}{2}\,d\omega < \frac{h}{2\sqrt{2}\,a^3(t_n-\tau_{p-1}-\hat{k})^{\frac{3}{2}}}\ ,\quad \hat{k}=\max_{g=p,\dots,n} k_g$$

特に $p=n-1$ に対して

(4.7)　$$= \frac{h}{4a^3\sqrt{k_{n-1}}\sqrt{k_n}\,(\sqrt{k_{n-1}}+\sqrt{k_n})}$$

(4.6)式の証明には，$\prod_{g=p}^{n}\Lambda_g > \left[1+\frac{2a^2}{h^2}(t_n-\tau_{p-1}-\hat{k})\sin^2\frac{\omega}{2}\right]^2$ となることを用いる．(4.6)式を用いると次の(4.8)式がでる

補助定理5

(4.8)　$$\left|\frac{1}{2\pi h^2}\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{g=p}^{n}\Lambda_g^{-1}\sin\omega\sin K\omega\,d\omega\right|$$

$$< \frac{1+2\sqrt{2}}{2a}\cdot\frac{1}{Kh\sqrt{t_n-\tau_{p-1}-\hat{k}}} + \frac{\sqrt{2}}{a}\cdot\frac{\hat{k}}{Kh\,(t_n-\tau_{p-1}-\hat{k})^{\frac{3}{2}}}$$

或いは，

(4.9)　$$< \frac{3}{2a}\,\frac{\sqrt{t_n-\tau_{p-1}}}{Kh^2}\cdot V_h$$

ここで V_h は $\frac{h}{k_p}$ $(p=1,2,\dots,n)$ の上界とする：

(4.10)　$$\frac{h}{k_p} < V_h \qquad (p=1,2,\dots,n)$$

この証明には，部分積分を用い，

$$\left|\frac{d}{d\omega}\prod_{g=p}^{n}\Lambda_g^{-1}\sin\omega\right| < \left[1+8\sum_{g=p}^{n}\lambda_g\sin^2\frac{\omega}{2}\right]\prod_{g=p}^{n}\Lambda_g^{-1}$$

或いは

$$< 2\left(n-p+\frac{3}{2}\right)\prod_{q=p}^{n}\Lambda_q^{-1}$$

となる事実を用いる.(*)

補助定理 6

$$(4.11)\quad |G_3(y_n, \eta_p; t_n, \tau_{p-1})|$$

$$< \left[\frac{2+\pi}{2\sqrt{2}\,a^3}V_h + \frac{1+2\sqrt{2}}{2a}\cdot\frac{1}{y_n+\eta_p}\right]\frac{1}{\sqrt{t_n-\tau_{p-1}-\hat{k}}} + \frac{\sqrt{2}}{a}\cdot\frac{\hat{k}}{(y_n+\eta_p)(t_n-\tau_{p-1}-\hat{k})^{\frac{3}{2}}}$$

或いは

$$(4.12)\quad < \frac{2+\pi}{2\sqrt{2}\,a^3}\frac{V_h}{\sqrt{t_n-\tau_{p-1}-\hat{k}}} + \frac{3}{2a}\frac{\sqrt{t_n-\tau_{p-1}}}{(y_n+\eta_p)h}V_h$$

証明には不等式

$$|G_3(y_n, \eta_p : t_n, \tau_{p-1})| = \frac{1}{2\pi h^2}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{q=p}^{n}\Lambda_q^{-1}\left[-4\sin^2\frac{\omega}{2}\sin(J+p)\omega\sin(J+n)\omega + \sin\omega\sin(n-p)\omega + \sin\omega\sin(2J+n+p)\omega\right]d\omega\right|$$

$$< \frac{2+(n-p)\pi}{\pi h^2}\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{q=p}^{n}\Lambda_q^{-1}\sin^2\frac{\omega}{2}\,d\omega + \left|\frac{1}{2\pi h^2}\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{q=p}^{n}\Lambda_q^{-1}\sin\omega\sin(2J+n+p)\omega\,d\omega\right|$$

の右辺に補助定理 4, 5 を適用すればよい.

補助定理 7　$k_1 \geqq k_2$ とする. 十分小さな h に対して

$$(4.13)\quad \left|\frac{1}{2\pi h^2}\int_{-\pi}^{\pi}\Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1}\sin\omega\sin K\omega\,d\omega\right| < \frac{\pi}{4a^3}\cdot\frac{Kh}{k_1\sqrt{k_2}},$$ 或いは

$$(4.14)\quad < \frac{Kh}{4a^3 k_1^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{Kh}{a\sqrt{k_1}}} + \left(\frac{\pi^3}{6a^3}+\frac{\pi}{3a^3}\right)\frac{h}{k_1\sqrt{k_2}}\quad (Kh > 3a\sqrt{k_1} \text{ に対して})$$

(*)　$(n-p+1)h < V_h(t_n-\tau_{p-1})$　((4.10) より)

(4.13) 式は (4.7) 式を用いれば直ちに導かれる．(4.14) を導くには，不等式

$$\text{左辺} < \left| \frac{1}{2\pi h^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega \sin K\omega}{(1+\lambda_1\omega^2)(1+\lambda_2\omega^2)} d\omega \right| + \frac{1}{\pi h^2} \int_0^{\pi} |\omega - \sin\omega| \Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1} d\omega$$

$$+ \frac{1}{\pi h^2} \int_0^{\pi} \left| \omega \Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1} - \frac{\omega}{(1+\lambda_1\omega^2)(1+\lambda_2\omega^2)} \right| d\omega$$

の右辺各項を評価すればよい．このとき k の関数 $\frac{Kh}{k^2} e^{-\frac{Kh}{a\sqrt{k}}}$ が $Kh > 3a\sqrt{k}$ で単調増加であることを用いる．

§5 Iteration scheme の収束性

定理の i) を証明しよう．そのためには，

$$(5,1) \qquad |v^{(s)}(t_n) - v^{(s-1)}(t_n)| < \delta\, |v^{(s-1)}(t_n) - v^{(s-2)}(t_n)| \qquad (s=3,4,\cdots)$$

となる正定数 $\delta < 1$ の存在が証明できればよい．実際このとき $v^{(s)}(t_n)$ は $s\to\infty$ のとき収束し，従って (3.10) より $k_n^{(s)}$ もある極限 k_n に収束する．一方列 $\{u^{(s)}(x_j, t_n)\}_{s=1,2,\cdots}$ は一様に有界である（最大値原理）から部分列 $\{u^{(s_{i_j})}(x_j, t_n)\}$ が極限 $u(x_j, t_n)$ に収束する．この極限値の関数 $u(x_j, t_n)$ $(j=0,1,\cdots, J+n)$ が方程式 (3.1)(*) 及び境界条件 (3.2)(3.4) をみたすことは明らかである．この2点境界値問題の解は一意であるから，全列 $\{u^{(s)}(x_j\ t_n)\}_{s=1,2,\cdots}$

(*) (3.1) に現れる k_n として勿論，上に得た極限値 k_n を用いる．

$(j=0,1,2,\cdots,J+n)$ が収束する．

そこで (5.1) を証明しよう．方程式 (3.7) の解に基本公式 (4.3) を適用すれば

$$v^{(s)}(t_n)=\left[1+a^2k_n^{(s)}G_\xi(y_n,\eta_n;\ t_n+k_n^{(s)},\tau_{n-1})\right]^{-1}\times$$

(5.2) $$\times\left[\sum_{j=1}^{J+n-1}hG(y_n,\xi_j;\ t_{n-1}+k_n^{(s)},\tau_{n-1})u_{\bar\xi}(\xi_j,t_{n-1})\right.$$
$$\left.-k_n^{(s)}G(y_n,0;\ t_{n-1}+k_n^{(s)},\tau_{n-1})f_{\bar\tau}(\tau_n)\right]$$

補助定理 2，3 と上式右辺の $\sum$ の部分がある初期値問題の解を与えていることと最大値原理を用いると

$$|v^{(s)}(t_n)|<4\left(\tilde M+\frac{M_1}{a}\sqrt{k_n^{(s)}}\right)$$

ただし，$\tilde M$ を $|u_{\bar x}(x_j,t_{n-1})|$ の上界，M_1 を $|\dot f(t)|$ の上界とした．(3.10) より

(5.3) $$k_n^{(s)}<\frac{h^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\beta}}$$

であるから十分小さな h に対して

(5.4) $$|v^{(s)}(t_n)|<4\tilde M+1=M\qquad(s=1,2,\cdots),$$

同時に (3.6)′ より

(5.5) $$\frac{h}{k_n^{(s)}}<2KM$$

を得る．次に，記号 $D(\cdot(k_n^{(s)}))=\cdot(k_n^{(s)})-\cdot(k_n^{(s-1)})$ を用いると

$$|v^{(s)}-v^{(s-1)}| < |D(\Gamma_1^{-1}(k_n^{(s)}))|\cdot|\Gamma_2(k_n^{(s)})| + |\Gamma_1^{-1}(k_n^{(s-1)})|\cdot\Big[\Big|\sum_{j=1}^{J+n-1} h\, D(G(y_n,\xi_j;\, t_{n-1}+k_n^{(s)},\tau_{n-1}))\cdot u_{\bar\xi}(\xi_j,\tau_{n-1})\Big| \tag{5.6}$$
$$+ |G(y_n,0;\, t_{n-1}+k_n^{(s)},\tau_{n-1})\, D(f(\tau_{n-1}+k_n^{(s)}))| + k^{(s-1)}|f_{\bar\tau}(\tau_n)|\cdot|D(G(y_n,0;\, t_{n-1}+k_n^{(s)},\tau_{n-1}))|\Big]$$

ここで

$$\Gamma_1(k_n^{(s)}) = 1+a^2 k_n^{(s)} G_\xi(y_n,\xi_n;\, t_{n-1}+k_n^{(s)},\tau_{n-1})$$

$$\Gamma_2(k_n^{(s)}) = \sum_{j=1}^{J+n-1} h\, G(y_n,\xi_j;\, t_{n-1}+k_n^{(s)},\tau_{n-1})\, u_{\bar\xi}(\xi_j,\tau_{n-1}) - k_n^{(s)} G(y_n,0;\, t_{n-1}+k_n^{(s)},\tau_{n-1})\, f_{\bar\tau}(\tau_n)$$

容易にわかることは

$$|\Gamma_2(k_n^{(s)})| < 2\tilde{M}, \quad |\Gamma_1^{-1}(k_n^{(s-1)})|\ 4 \quad (\text{補助定理}2)$$
$$|G(y_n,0;\, t_{n-1}+k_n^{(s)},\tau_{n-1})\, D(f(\tau_{n-1}+k_n^{(s)}))| < \frac{\sqrt{2KM}\, M_1}{a}\frac{|D(k_n^{(s)})|}{\sqrt{h}} \quad (\text{補助定理}3\ (5.5)) \tag{5.7}$$

更に $\bar{k}$ を $k_n^{(s)}, k_n^{(s-1)}$ のある中間値として

$$|D(\Gamma_1^{-1}(k_n^{(s)}))| < 16\,\Big|a^2 G_\xi(y_n,\eta_n;\, t_{n-1}+\bar{k},\tau_{n-1}) + a^2\bar{k}\frac{dG_\xi}{d\bar{k}}(y_n,\eta_n;\, t_{n-1}+\bar{k},\tau_{n-1})\Big|\,|D(k_n^{(s)})|$$
$$< 4\Big[\frac{\sqrt{2}(KM)^{\frac{3}{2}}}{a} + \frac{5a}{l}\Big]\frac{|D(k^{(s)})|}{\sqrt{h}} \tag{5.8}$$

次に

$$\Big|\sum_{j=1}^{J+n-1} h\, D(G(y_n,\xi_j;\, t_{n-1}+k_n^{(s)},\tau_{n-1}))\cdot u_{\bar\xi}(\xi_j,\tau_{n-1})\Big|$$
$$\leqq a^2|D(k_n^{(s)})|\cdot\Big|\sum_{j=1}^{J+n-1} h\,\Phi_{\xi\bar\xi}(\xi_j)\,u_{\bar\xi}(\xi_j,\tau_{n-1})\Big|, \quad \bar\Phi(\xi_j) = \frac{1}{2\pi h}\int_{-\pi}^{\pi}\Lambda^{(s)^{-1}}\Lambda^{(s-1)^{-1}}\big[e^{-i(J+n-j)\omega}+e^{-i(J+n+j-1)\omega}\big]d\omega$$
$$\leqq a^2|D(k_n^{(s)})|\Big[\tilde{M}(|\Phi_\xi(\xi_{J+n-1})|+|\Phi_\xi(0)|) + \frac{\bar{M}}{a^2}\sum_{j=0}^{J+n-2} h\,|\Phi_\xi(\xi_j)|\Big], \quad |u_{x\bar{x}}(x_j,t_{n-1})| < \frac{\bar{M}}{a^2}$$

ここで、$\Phi_\xi(\xi_j)$ の評価に、(4.7)，(4.13)，(4.14) を用いれば

$$< \frac{C_0}{\sqrt{h}}|D(k^{(s)})| \tag{5.9}$$
（C は $\tilde{M}$，M，$\bar{M}$ だけに関係した定数）

最後に，再び (4.7) を用いて

(5.10) $\left| k_n^{(s-1)} f_{\tau}(\tau_n) D(G(y_n, 0; t_{n-1}+k_n^{(s)}, \tau_{n-1}) \right| < \frac{\sqrt{2KM}\cdot M_1}{a} \frac{|D(k_n^{(s)})|}{\sqrt{h}}$

(5.6) — (5.10) から

$$|v^{(s)} - v^{(s-1)}| < C_1 \frac{|D(k_n^{(s)})|}{\sqrt{h}}$$

一方 (3.10) から

$$|D(k_n^{(s)})| < \frac{K}{\beta}\sqrt{h}\, |v^{(s-1)} - v^{(s-2)}|$$

従って

(5.11) $|v^{(s)} - v^{(s-1)}| < \frac{KC_1}{\beta} |v^{(s-1)} - v^{(s-2)}|$

β を十分大きくとれば (5.1) をみたす δ がとれる.

§6 差分解の収束性

いま,

(6.1) $|f(t)|, |\varphi(x)| < M_0$, $|\dot{f}(t)|, |\dot{\varphi}(x)| < M_1$, $|\ddot{\varphi}(x)| < M_2$

を仮定する. 系(3.1)~(3.4)の解 u に対して最大値原理を用いると

(6.2) $|u(x_j, t_n)| < M_0$, $j=0,1,2,\ldots, J+n$, $n=1,2,\ldots$

ここで

(6.3) $|v(t_n)| < M$, $n=1,2,3,\cdots$, $t_n < \sigma$

が証明できたとすると, $u_{\bar{t}}$ のみたすべき差分方程式系に最大値原理を用いて

(6.4) $|u_{\bar{t}}(x_j, t_n)| < \bar{M}$, $|u_{x\bar{x}}(x_j, t_n)| < \frac{\bar{M}}{a^2}$, $j=1,2,\cdots, J+n-1$, $n=1,2,\ldots$, $t_n<\sigma$

$\widetilde{M} = \max\{M_1, a^2M_2, 2KM^2\}$

を得,

(6.5) $\quad |u_x(x_j, t_n)| < M + \dfrac{\bar{M}}{a^2}[l + 2KM\sigma] = \tilde{M}, \quad t_n < \sigma$

以上のアプリオリ評価から $0 < t_n < \sigma$ での収束性が示される:列 $h_\alpha \to 0$ を考える.(5.3) から $k_{n_\alpha} \to 0$. $y_\alpha(t)$ を自由境界 (y_n, t_n) $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を結んでできる折線とする.(6.3) より $\{y_\alpha(t)\}$ は一様に有界,同程度連続(一様リプシッツ条件をみたす)な関数族となり,有界でリプシッツ連続な関数 $y(t)$ に一様収束する(*).この境界 $x = y(t)$ をもつ問題 (2.1)−(2.4) の差分近似 (3.1)−(3.4) の解 $u(x_j, t_n)$ の収束性は Petrowsky [6] によればよい.得られた極限関数 $u(x, t)$ がステファン条件 (2.5) をみたすことも容易に確かめられる.

問題は (6.3) の証明である.基本公式 (4.2) より

(6.6) $\quad |v(t_n)| < 4\left[2M_0 + M_1 + M_1 \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{k_p}{a\sqrt{t_n - \tau_{p-1}}} + a^2 \|v\| \cdot \left|\sum_{p=1}^{n-1} k_p G_3(y_n, \eta_p; t_n, \tau_{p-1})\right|\right]$

補助定理 6 より,h 小に対して

(6.7) $\quad < 4\left[2M_0 + M_1 + \dfrac{2M_1}{a}\sqrt{t_n} + (C_2 + C_3\|v\|)\sqrt{t_n} + C_4 \|v\| h^{\frac{1}{8}}\right]$

いま,

(6.8) $\quad M = 4(2M_0 + M_1) + 1$

ととり,h を小さくして $4C_4 M h^{\frac{1}{8}} < \frac{1}{2}$ となるようにし,

(*) ここでは部分列 $\{y_\alpha(t)\}$ の収束しかでないが,最終的には解の一意性から全列収束が導かれる.

のを小さく選んで

$$4\left[\frac{2M_1}{a}\sqrt{\sigma} + (c_2+c_3M)\sqrt{\sigma}\qquad\right] < \frac{1}{2}$$

とすれば，

$$|v(t_n)| < M\ , \quad 0 < t_n < \sigma$$

をうる．

かくして $0<t_n<\sigma$ に対して差分解の収束性（局所解の存在）が証明されたことになる．この事実から大局解の存在を導くには Friedman [3] によればよい．従って局所解の収束性から，アプリオリ評価

$$|v(t_n)| < M' \quad 0<t_n<T$$

を得，$0<t<T$ 全体で差分解が収束することは前と同じようにすればよい．

§7 おわりに

$x=0$ で断熱条件が与えられているときも全く同様に差分解の収束性が示される．更に第3種境界条件の与えられている場合にも拡張可能であろう．もっと複雑な多相のステファン問題への適用も困難なかろう．

数値計算でも良好な結果を得た．

最後に，この研究をまとめるのに，奥川光太郎先生，

山口昌哉先生をはじめ，京大工学部数値解析セミナール参加者全員の方々に多大な批判忠告を受けました．ここに厚く御礼申し上げます．

参考文献

[1] Douglas J. Jr. and Gallie T. M., On the numerical integration of a parabolic differential equation subject to a moving boundary condition, Duke Math. J. 22 No.4, 1955.

[2] Evans G. W. II, A note on the existence of a solution to a problem of Stefan, Quart. Appl. Math. vol 9. No 2. 1951

[3] Friedman A., Free boundary problems for parabolic equations I. Melting of solids, J. Math. and Mech, vol 8 No.4 1959

[4] Rubinstein, L. I. On the determination of the position of the boundary which separates two phases in the one dimensional problem of Stefan, D. A. N. SSSR, 58, 1947

[5] Rubinstein, L. I. Stefan's problems, 1967

[6] イ.ゲ.ペトロフスキー，偏微分方程式論，東京図書，1961