数理解析研究所講究録
第184巻 1973年 36-41

2空間変数の強双曲系混合問題

東京理大 理工　谷口 勝

§1. 序

一階双曲系方程式の混合問題において，これまでほとんど，strictly hyperbolic system または symmetric hyperbolic system だけが扱われてきた。そこで，我々は strongly hyperbolic system に対する混合問題：

$$
(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A\dfrac{\partial u}{\partial x} + B\dfrac{\partial u}{\partial y} + f(t,x,y) = L[u] + f \\ u(0,x,y) = 0 \\ S\,u(t,0,y) = g(t,y)\ , \quad (t,x,y) \in [0,\infty)\times[0,\infty)\times R^1 \end{cases}
$$

を考える。ここで $u^t = (u_1, \cdots, u_N)$，A 及び B は $N\times N$ constant complex matrix，A は non-singular，S は $l\times N$ constant matrix でその rank は l とする。そのとき，Kreiss[2]と同じ形のエネルギー不等式が(1)に対して成立することを報告するのが本稿の目的である。

§2. 仮定と結果

我々は(1)に対して次の条件 I.—IV. を仮定する：

I. op.$(\frac{\partial}{\partial t} - L)$ は strongly hyperbolic である.

II. A は次の形をもつ,

$$A = \begin{pmatrix} A_{\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & A_{\mathrm{II}} \end{pmatrix},$$

$$A_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix} < 0, \quad A_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} a_{m+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_N \end{pmatrix} > 0 .$$

これは一般性を失っていない.

III. $\forall(\gamma, \eta) \in R^2 - \{0\}$ に対して, ξ に関する方程式 $\det(\gamma I - (A\xi + B\eta)) = 0$ の実根は高々 double である.

IV. Boundary matrix S は uniform Lopatinski's condition をみたす.

方程式 (1) を Fourier-Laplace 変換すると,

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{d\hat{u}}{dx} = A^{-1}(\tau I - i\eta B)\hat{u} - A^{-1}\hat{f} & , x \geqq 0 \\ S \cdot \hat{u} = \hat{g} & , x = 0 \end{cases}$$

となる. ここで $\hat{h}(\tau, x, \eta)$ は $h(t, x, y)$ を Fourier-Laplace 変換したものである.

我々は次の結果を得る.

<u>Main Theorem</u> 条件I〜IV. を仮定する. そのとき, (2) の解 $\hat{u}(\tau, x, \eta)$ に対して,エネルギー不等式

$$
\begin{aligned}
&\mu \| \hat{u}(\tau,\cdot,\eta)\|^2_{L^2(R_+^1)} + |\hat{u}(\tau,0,\eta)|^2 \\
(3)\qquad &\leqq \text{const.} \left\{ \frac{1}{\mu} \| \hat{f}(\tau,\cdot,\eta)\|^2_{L^2(R_+^1)} + |\hat{g}(\tau,\eta)|^2 \right\} \\
&\qquad ({}^\forall \mathrm{Re}\,\tau = \mu \geqq \mu_0)
\end{aligned}
$$

が成立する正数μ_0が存在する。

§3. 2空間変数の strong hyperbolicity について

2空間変数の strong hyperbolicity の一つの特徴づけを述べる.

<u>Theorem.</u> 次の2つは同値である.

(i) op. $\left(\frac{\partial}{\partial t} - A\frac{\partial}{\partial x} - B\frac{\partial}{\partial y}\right)$ は strongly hyperbolic である.

(ii)-(a) ${}^\forall(\xi,\eta) \in R^2 - \{0\}$ に対して, $C(\xi,\eta) = A\xi + B\eta$ は実の固有値だけをもち, かつ対角化可能である。

(b) ${}^\forall(\xi,\eta) \in R^2 - \{0\}$ に対して, $C(w_1,w_2) = Aw_1 + Bw_2$ の固有値及び対応した projection op. は, (ξ,η) の $\mathbb{C}^2$ におけるある近傍で正則である.

§4. Main Theorem の証明の概略

まず, Kreiss [2] と同じ形の Lemma をいくつか述べる.

$$M(\tau,\eta) = A^{-1}(\tau I - i\eta B)$$

とする.

<u>Lemma.1</u> (Hersh [1]) ${}^\forall \mathrm{Re}\,\tau > 0$ に対して, $M(\tau,\eta)$ は $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ なる k 個の固有値及び $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ なる $(N-k)$ 個の

固有値をもつ.

<u>Lemma 2</u>　$^\forall \mathrm{Re}\,\tau > 0$ に対して，analytic matrix $U(\tau, \eta)$ が存在して

$$U^{-1} M U = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} \tag{4}$$

となる.

<u>Lemma 3</u>　$^\forall \mathrm{Re}\,\tau \neq 0$，$^\forall \xi \in R^1$ に対して，次の評価が成立する.

$$\| (M(\tau, \eta) - i\xi I)^{-1} \| \leqq \frac{\mathrm{const}}{|\mathrm{Re}\,\tau|} . \tag{5}$$

$\tau = \mu + i\nu$，$\zeta = (i\nu, \eta)$ とおき，$M(\tau, \eta) = M(\zeta, \mu)$ とかくことにする.

<u>Lemma 4</u>　任意の固定した $\zeta_0 = (i\nu_0, \eta_0) \neq 0$，$\mu = 0$ に対して，matrix T_0 が存在して，

$$T_0^{-1} M T_0 = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_q \end{pmatrix} \tag{6}$$

となる. ここで M_j は次の性質をもつ；

(i)　M_1 の固有値は $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$ である.

(ii)　$M_j\ (j \geqq 2)$ の固有値は $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ でかつ $M_j\ (j \geqq 2)$ は次の3つの形の1つをもつ,

$$
(7)\qquad \begin{cases}
① \; M_j(\zeta_0, 0) = (\lambda_j(\zeta_0, 0)) \\[1ex]
② \; M_j(\zeta_0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda_j(\zeta_0, 0) & i \\ 0 & \lambda_j(\zeta_0, 0) \end{pmatrix} \\[1ex]
③ \; M_j(\zeta_0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda_j(\zeta_0, 0) & 0 \\ 0 & \lambda_j(\zeta_0, 0) \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

但し $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Lemma 4 において, Kreiss [2] と異なった形 ③ が現われた. これを Main Theorem の証明の基本になる次の Lemma で取り扱う.

<u>Lemma 5</u> 任意の固定した $\zeta_0 = (i\nu_0, \eta_0) \neq 0$, $\mu = 0$ に対して, $(\zeta_0, 0)$ の近傍で次のような analytic な matrix $T(\zeta, \mu)$ が存在する;

$$
(8)\qquad T^{-1} M T = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_q \end{pmatrix} .
$$

さらに $M_j(\zeta, 0)$ が

$$
M_j(\zeta_0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda_j(\zeta_0, 0) & 0 \\ 0 & \lambda_j(\zeta_0, 0) \end{pmatrix}
$$

なる形をもてば, $M_j(\zeta, \mu)$ は

$$
M_j(\zeta, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda_{j1}(\zeta, \mu) & 0 \\ 0 & \lambda_{j2}(\zeta, \mu) \end{pmatrix}
$$

なる形をもつ.

以上の事を用いると，symmetrizer を construct できて，Main Theorem を証明出来る．

文献

[1] R. Hersh, Mixed problems in several variables, J. Math. Mech., 12(1963), 317−334.

[2] H.O. Kreiss, Initial boundary value problems for hyperbolic systems, C.P.A.M., 23(1970), 277-298.

[3] J.V. Ralston, Note on a paper of Kreiss, C.P.A.M., 24(1971), 759−762.