数理解析研究所講究録
第184巻 1973年 54-62

ある非線形放物型方程式の初期値・境界値問題について; 大域解の存在と解の blow up

早大 理工　堤 正義

§1. 序

O. A. Oleinik - S. N. Kruzhkov [1] が，2階準線形放物型方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + f(x,t,u,u_x) = 0$$

$$u_x = (\partial u/\partial x_1, \cdots, \partial u/\partial x_n)$$

の初期値・第1種境界値問題の古典的大域解の存在を証明する際に，非線形項に加えた条件の1つは

$$-uf(x,t,u,0) \leqslant A_1 u^2 + A_2 \quad (A_1, A_2 \text{ は定数})$$

である．(A. Friedman [2], O.A. Ladyzhenskaja - N.N. Uraltseva [3] も参照)．この条件を満足しない場合には，一般に解は有限時間で blow up することが，常微分方程式の理論の類推から予想される．

H. Fujita [4] は，次の2階半線形放物型方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^{1+\alpha}, \quad \alpha \geqslant 0.$$

の初期値問題および初期値・境界値問題の解が，適当な条件の下で，有限時間で blow up する事を示した．

ここでは，次の2階準線形放物型方程式の初期値・境界値問題を考える：

(1) $\frac{\partial}{\partial t}u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left((1+|u|^{p-2}) \frac{\partial}{\partial x_i}u \right) + u^{1+\alpha}, \quad t>0, \ x\in\Omega$

(2) $u(x,0) = u_0(x), \quad x\in\Omega$

(3) $u(x,t) = 0, \quad t>0, \ x\in\partial\Omega.$

ここに，Ω は R^n の有界領域で，その境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかとする．また，$p>2$．$\alpha>0$ とする．さらに，初期値は非負とする（この時，最大値の原理から解も非負となる）．

§2．大域解の存在 （$p>2+\alpha$ の場合）．

$p>2+\alpha$ の場合には，次の大域的弱解の一意存在定理が得られる：

定理1．任意の非負値初期関数 $u_0(x)\in L^\infty(\Omega)$ に対して，初期値・境界値問題 (1)-(3) は一意的な大域解 $u(x,t)$ を持ち，

(4) $u(x,t)\geq 0 \quad$ a.e. in $\Omega\times[0,T]$

(5) $u(x,t)\in L^\infty(\Omega\times[0,T]) \cap L^\infty(\delta,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

(6) $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\in L^2(\delta,T;L^2(\Omega))$

となる．ここに δ は任意の正数である．

もし，初期値 $u_0(x)\in L^\infty(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ ならば，$\delta=0$ と出来る．

定理１の証明には，次の補題が有用である．

補題１．$u(x)\in C^1(\bar\Omega)$ かつ $u|_{\partial\Omega}=0$，$\alpha_0\geq 0$，$\alpha_1\geq 1$ とする．この時，次の不等式が成立する：

a）$\alpha_1<n$ ならば，

(7) $$\left(\int_\Omega |u(x)|^{(\alpha_0+\alpha_1)\cdot\frac{n}{n-\alpha_1}}\,dx\right)^{\frac{n-\alpha_1}{n}} \leq K\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |u(x)|^{\alpha_0}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)\right|^{\alpha_1}dx$$

b）$\alpha_1=n$ ならば，任意の $s\geq 1$ に対して，

(8) $$\left(\int_\Omega |u(x)|^{(\alpha_0+\alpha_1)s}\,dx\right)^{1/s} \leq K\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |u(x)|^{\alpha_0}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)\right|^{\alpha_1}dx$$

c）$\alpha_1=n$ ならば，

(9) $$\max_{x\in\Omega}|u(x)| \leq K\sum_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega |u(x)|^{\alpha_0}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)\right|^{\alpha_1}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_0+\alpha_1}}.$$

ここに，K は，α_0，α_1，Ω には依存するが，$u(x)$ には依存しない正の定数である．

定理１の証明．　関数 $u_{0\varepsilon}(x)$ は，各 $\varepsilon>0$ に対し，$\bar\Omega$ 上で定義された十分滑らかな関数で，境界 $\partial\Omega$ 上で零になり，非負値，かつ $\varepsilon\to 0$ の時

(10) $$u_{0\varepsilon}\longrightarrow u_0 \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \text{ strongly}$$

となるものとする．

次の初期値・境界値問題を考える：

(11) $$\frac{\partial}{\partial t}u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left[1+|u|^{p-2}\right]\frac{\partial}{\partial x_i}u\right)+u^{1+\alpha}-\varepsilon\,u^{2+\alpha}$$

(12) $$u(x,0)=u_{0\varepsilon}(x),\qquad x\in\Omega$$

(13) $$u(x,t)=0,\qquad t>0,\quad x\in\partial\Omega.$$

この時，各 $\varepsilon>0$ に対して問題 (11)-(13) は，一意的な大域的古典解 $u(x,t;\varepsilon)$ $(=u_\varepsilon(x,t))$ を持つ（O.A. Oleinik - S.N. Kruzhkov [1]）.

ε を零にもって行った極限として，問題 (4)-(6) の解を求めようと言う訳である．

補題 2. ε には依存しない正の定数 M_i $(i=1,2,3)$ が存在して，

(14) $$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega\times[0,T])\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\leq M_1,$$

(15) $$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\delta,T;H_0^1(\Omega))}\leq M_2,$$

(16) $$\left\|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon\right\|_{L^2(\delta,T;L^2(\Omega))}\leq M_3.$$

ここに，δ は任意の正数である．

補題 2 から，ある関数 $u(x,t)$ と関数列 $\{u_\varepsilon(x,t)\}$ の部分列 $\{u_{\varepsilon_i}(x,t)\}$ が存在して，$\varepsilon_i \longrightarrow 0$ の時

(17) $$u_{\varepsilon_i}(x,t)\longrightarrow u(x,t)\quad \text{in } L^\infty(\Omega\times[0,T]) \text{ weakly star}$$
$$\text{in } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ weakly}$$

(18) $$u_{\varepsilon_i}(x,t)\longrightarrow u(x,t)\quad \text{in } L^\infty(\delta,T;H_0^1(\Omega)) \text{ weakly star}$$

(19) $$\frac{\partial}{\partial t}u_{\varepsilon_i}(x,t)\longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\quad \text{in } L^2(\delta,T;L^2(\Omega)) \text{ weakly}$$

となる．後は Ju.A. Dubinskii [5] と同じ議論で，$u(x,t)$ が求める解である事が示せる．

定理 1 の最後の主張は，補題 2 において $\delta=0$ と取れる事より容易に従う．また，一意性の証明も通常の L^2-評価で，容易

に出来る．

§3　解の blow up（$2<p<\alpha$ の場合）

$2<p<\alpha$ の場合には，次の定理が得られる：

定理2．$2<p<\alpha$ とする．もし，初期値 $u_0(x)$ が，滑らかな非負値関数で，境界 $\partial\Omega$ で零となり，かつ条件

$$(20)\qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}(1+(u_0(x))^{p-2})\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u_0(x)\right)^2dx-\frac{1}{2+\alpha}\int_{\Omega}(u_0(x))^{2+\alpha}dx\le 0$$

を満足するならば，対応する解 $u(x,t)$ は有限時間で blow up する．

証明．初めに，次の初期値・境界値問題を考える．

$$(21)\qquad \frac{\partial}{\partial t}v=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left((1+v^{p-2})\frac{\partial}{\partial x_i}v\right)-\frac{p-2}{2}\sum_{i=1}^{n}v^{p-3}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}v\right)^2+v^{1+\alpha}$$

$$(22)\qquad v(x,0)=u_0(x)\ge 0,\quad x\in\Omega$$

$$(23)\qquad v(x,t)=0,\quad t\geqslant 0,\quad x\in\partial\Omega.$$

この時，最大値の原理から，$v(x,t)$ の存在する区間において

$$(24)\qquad 0\le v(x,t)\le u(x,t)$$

となる．従って，v が有限時間で blow up する事を示せばよい．(21)式の両辺に $\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)$ を掛け x,t に関して積分すれば，

$$(25)\qquad \int_0^t\int_{\Omega}\left|\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)\right|^2dx\,dt+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}(1+(v(x,t))^{p-2})\left(\frac{\partial}{\partial x_i}v(x,t)\right)^2dx$$
$$-\frac{1}{2+\alpha}\int_{\Omega}(v(x,t))^{2+\alpha}dx$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}(1+(u_0(x))^{p-2})\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u_0(x)\right)^2dx-\frac{1}{2+\alpha}\int_{\Omega}(u_0(x))^{2+\alpha}dx$$

を得る．仮定から，右辺≦0であるから

$$\text{(26)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v(x,t)\right)^2 dx \le \frac{2}{2+\alpha} \int_\Omega (v(x,t))^{2+\alpha} dx,$$

$$\text{(27)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (v(x,t))^{p-2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v(x,t)\right)^2 dx \le \frac{2}{2+\alpha} \int_\Omega (v(x,t))^{2+\alpha} dx$$

ところで，方程式(21)に $v(x,t)$ を掛け，x に関して積分すれば，

$$\text{(28)} \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = -\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v(x,t)\right)^2 dx - \frac{p}{2}\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (v(x,t))^{p-2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v(x,t)\right)^2 dx + \int_\Omega (v(x,t))^{2+\alpha} dx$$

を得る．上式と(26)，(27)から

$$\text{(29)} \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \ge \frac{\alpha-p}{2+\alpha} \int_\Omega (v(x,t))^{2+\alpha} dx$$

が従う．ところで，Ω が有界領域であるから，不等式

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le (\mathrm{mes}(\Omega))^{\alpha/(2+\alpha)} \|u\|^2_{L^{2+\alpha}(\Omega)}, \quad \forall u \in L^{2+\alpha}(\Omega),$$

が成り立つ．従って

$$\text{(30)} \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \ge \frac{\alpha-p}{2+\alpha} (\mathrm{mes}(\Omega))^{-\alpha/2} \|v(t)\|^{2+\alpha}_{L^2(\Omega)}.$$

これから，直ちに

$$\text{(31)} \qquad \|v(t)\|^{\alpha}_{L^2(\Omega)} \ge \frac{1}{\|u_0\|^{-\alpha}_{L^2(\Omega)} - Lt}$$

が従う．ここに，

$$L = \frac{\alpha(\alpha-p)}{2+\alpha} (\mathrm{mes}(\Omega))^{-\alpha/2}.$$

従って，$t \longrightarrow \frac{1}{L}\|u_0\|^{-\alpha}_{L^2(\Omega)} < +\infty$ としたとき，$\|v(t)\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow +\infty$

定理の証明終り

注意1．$p-2 < \alpha < p$ において，大域解が存在するか，

解の blow up が生じるか否かは，未解決である．

§4. Dagenerate した方程式の場合．

次の初期値・境界値問題を考える：

(32) $$\frac{\partial}{\partial t}u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+u^{1+\alpha},\quad t>0,\ x\in\Omega,$$

(33) $$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega$$

(34) $$u(x,t)=0,\quad t>0,\ x\in\partial\Omega.$$

この時，次の定理を得る．

定理 3． $p>2+\alpha$ とする．任意の非負値初期関数 $u_0(x)\in L^\infty(\Omega)$ に対して，初期値・境界値問題 (32)-(34) は一意的な大域解 $u(x,t)$ を持ち，

(35) $$u(x,t)\geq 0 \quad \text{a.e. in } \Omega\times[0,T]$$

(36) $$u(x,t)\in L^\infty(\Omega\times[0,T])$$

(37) $$v(x,t)=(u(x,t))^{p-1}\in L^\infty(\delta,T;H_0^1(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

(38) $$w(x,t)=(u(x,t))^{\frac{p}{2}}\in H^1(\delta,T;L^2(\Omega)).$$

となる．ここに δ は任意の正数である．さらに，初期関数 $u_0(x)$ が上記の仮定の外に，さらに $v_0(x)=(u_0(x))^{p-1}\in H_0^1(\Omega)$ を満足すれば，$\delta=0$ に取ることができる．

定理3の証明は，定理1の証明と類似の方法によって，出来る．

注意1. (32)式は $u=0$ で degenerate している為，解の滑らかさがくずれる（D.G. Aronson [6]）

注意2. $2<p<2+\alpha$ の時に，問題 (32)-(34) の解が blow up するかどうかは検討中である．

注意3. 定理3の結果は，Ju. A. Dubinski [5] の結果より，解の滑らかさが上がっている．

文献

[1] O.A. Oleinik, S.N. Kruzhkov, Quasi-linear parabolic equations of the second order with many independent variables, Uspekhi. Mat. Nauk SSSR 16, (1961), 115-155.

[2] A. Friedman, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1964

[3] O.A. Ladyzenskaya, V.A. Solonnikov; N.N. Uraltsera, Linear and quasilinear parabolic equations, "Nauk" Moskow (1967)

[4] H. Fujita, On the blowing up of a solutions of the Cauchy problem for $u_t=\Delta u+u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sect. 1, 13 (1966), 109-124.

[5] Ju. A. Dubinskii, Weak convergence in Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations, Math. Sb., 67 (1965), 609-642

[6] D. G. Aronson, Regularity properties of flows through porous media, SIAM. J. Appl. Math. 17 (1969), 461-467

[7] M. Tsutsumi, Existence and Nonexistence of Global Solutions for Nonlinear Parabolic Equations, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 8 (1972/73), 211-229.