数理解析研究所講究録
第184巻 1973年 63-75

抽象コーシー問題について

早大 理工 実方宣洋

§1. 序

Banach空間における有界線型作用素の作る強連続半群（以下半群と略記）の生成作用素を抽象コーシー問題(ACP)の立場から特徴付ける問題は，Phillipsの研究（[2]参照）に始まり，その後[4]，[6]，[10]，[12] などの研究がある。これらの研究において取扱われたACPは，半群の意味で適切（S.G. well posed，[11]参照）な問題であった。本稿では主にS.G. well posed ではないACPを考察する。本稿でACPによる特徴付けを試みる作用素族は最近[8]により導入された。これらの作用素族は[5]により導入された超函数半群（R.D.S.G.）と密接な関係を持つが，この関係及び本稿で必要な事柄は§2において要約されている。詳細は，[1]，[5]，[8]，[9]，[14] を参照されたい。§3では本稿の主な結果とその証明が述べられている。ここで扱われるACPはS.G. well posed ではなく，従ってACPの解の増大 order は制限を受けないため，普通の意味

のラプラス変換を用いる事ができない。尚，この節の内容は[12]では触れなかったので，やや詳しく述べたい。又 ACP の定義も[12]とはやや異なる形にする。X を Banach 空間として A をその中の線型作用素とする。

定義 1.1. $0 < T \leq \infty$, $x \in X$, $u(t) = u(t; x) : [0, T) \to X$ とする。このとき $u(t)$ が条件 (i) $u(t) \in C^1([0,T); X)$ (or $u(t) \in C([0,T); X) \cap C^1((0,T); X)$), (ii) $u(0; x) = x$, (iii) $u(t) \in D(A)$ & $u'(t) = Au(t)$ for $t \in (0,T)$, をみたすならば $u(t)$ は $(ACP; T, x)$ (or $(ACP_1; T, x)$) for A の解であると云う。

ここで ACP, ACP_1 という二つの抽象コーシー問題が定義されたが，これは §4 で得られる $(C_{(k)})$ 半群の生成作用素（定義は[8] 又は本稿 §2 を参照）の抽象コーシー問題による特徴付けが二通り考えられるからである。尚，§4 の内容は[12]で述べたので，ここでは結果と二，三の注意を述べるに止め，証明は省略した。又，本稿を通して作用素 A は resolvent set $\rho(A) \neq \phi$ なるもののみを扱うが，$\rho(A) = \phi$ の場合については [4], [6], [7], [10], [15] などの研究がある。

§2. Preliminaries.

$\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ を半群，即ち条件 $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$ for $t, s > 0$, 及び $(0, \infty) \ni t \mapsto T(t)x$ は連続 for $\forall x \in X$ をみたすとする。このとき $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ の type $\omega_0 = \lim_{t \to \infty} t^{-1} \log \|T(t)\|$, *infinitesimal generator* (i.g.) A_0 ; $A_0x = \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T(h)x - x)$, $D(A_0) = \{x \in X; \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T(h)x - x)$ exists$\}$, *continuity set* $\Sigma = \{x \in X; \lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x\}$, そして $X_0 = \bigcup_{t>0} T(t)(X)$ が定義される。$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ に次の仮定を置く。

(α) $\overline{X_0} = X$

(β) $^\exists\omega_1 > \omega_0$ が存在して，$^\forall\lambda > \omega_1$ に対して $^\exists R(\lambda) \in \mathcal{B}(X)$ が存在して， $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt$ for $x \in X_0$。

(γ) $R(\lambda)x = 0$ for $\lambda > \omega_1$ ならば $x = 0$。

以上の仮定の下で A_0 は *closable* ; $\overline{A_0} = A$ を $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ の *complete infinitesimal generator* (c.i.g.) と呼ぶ。さらに $\rho(A) \supset \{\lambda > \omega_1\}$ そして，$R(\lambda) = R(\lambda; A)$ ($= A$ の *resolvent*) が示される ([8] 参照)。

定義 A. ([8]). $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ を (α), (β), (γ) をみたす半群として，A をその c.i.g. とする。このとき整数 $k \geq 0$ が存在して，$D(A^k) \subset \Sigma$ ならば，$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ を *class* $(C_{(k)})$ の半群と呼ぶ。

A が $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in (C_{(k)})$ の c.i.g. となる必要十分条件は，$\overline{D(A)} = X$ と，次の二条件が成立することである。

(2.1) $\begin{cases} \text{ある } \omega_0 \in \mathbb{R},\ \omega > \omega_0 \text{ が存在し，} \rho(A) \supset \{\lambda > \omega_0\} \\ \text{かつ } ^\forall T > 0 \text{ に対して } M_T > 0 \text{ が存在して，} \\ \sup\{\|\lambda^n R(\lambda; A)^n x\|;\ 0 \leq n/\lambda \leq T,\ \lambda \geq \omega,\ n = 1, 2, \cdots\} \leq M_T \|x\|_k \end{cases}$

(2.2) $\begin{cases} ^\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して } M_\varepsilon > 0 \text{ が存在し，又 } ^\forall x \in D(A^k) \text{ に対し} \\ \text{て，} \lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon, x) > \omega \text{ が存在して，} \end{cases}$

$$\left[\sup\{\|\lambda^n R(\lambda;A)^n x\|;\ \varepsilon \le n/\lambda \le \varepsilon^{-1},\ \lambda \ge \lambda_0,\ n=1,2,\cdots\} \le M_\varepsilon \|x\| \right.$$

ここで，$\|x\|_k \equiv \|x\| + \|Ax\| + \cdots + \|A^k x\|$ 。さらに対応 $A \longleftrightarrow \{T(t)\}_{t\ge 0}$ は一対一，又 $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ は指数公式，$T(t)x = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{t}{n}A)^{-n}x$ for $t \ge 0,\ x \in D(A^k)$ により生成される（[8] 参照）。

ここで $\overline{D(A)} = X$ なる閉作用素 A に対して条件 (2.1) のみを仮定してみる。この条件下で指数公式

$$(2.3) \qquad u(t;x) = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{t}{n}A)^{-n}x$$

は $t \ge 0,\ x \in D(A^k)$ に対して収束し，$x \in D(A^{k+1})$ とすれば $u(t;x)$ は $(ACP;\infty, X)$ for A の一意解を与えている（[13] 参照）。しかし一般には条件 (2.1) のみでは，ACP for A は S.G. well posed ではない。次に，さらに条件 (2.2) を仮定すると A は半群 $\{T(t)\}_{t\ge 0} \in (C_{(k)})$ の c.i.g. となる。A と $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ との間には次の関係がある（[8] 参照）。

(a) $\left(\frac{d}{dt}\right)^l T(t)x = A^l T(t)x = T(t)A^l x$, for $x \in D(A^l),\ t>0,\ l=1,2,\cdots$

(b) $T(t)x - x = \lim_{\delta\downarrow 0}\int_\delta^t AT(s)x\,ds$ for $x \in D(A^k)$

(c) $T(t)x - x = \int_0^t AT(s)x\,ds$ for $x \in D(A^{k+1})$ 。

(b) (or (c)) より $^\forall x \in D(A^k),\ k \ge 1$, (or $x \in D(A^{k+1}),\ k \ge 0$,) に対して，$u(t;x) = T(t)x$ は $(ACP_1;\infty, x)$ (or $(ACP;\infty, x)$) for A の一意解を与え，さらに (a) より $u(t;x) \in D(A^k)$ (or $u(t;x) \in D(A^{k+1})$) for $t \ge 0$ が示される。

条件 (2.1) をみたす $\overline{D(A)} = X$ なる作用素 A は，X 上の

R.D.S.G. の infinitesimal generator (i.g.) となるが，逆に R.D.S.G. の i.g. は必ずしも (2.1) をみたさない。そこで [8] [9] では条件 (2.1) を変型して，R.D.S.G. の i.g. を特徴付けている。

<u>定理B.</u>　A を線型作用素，又 $Y=\bigcap_{n\geq 1} D(A^n)$ を seminorm 系 $\{\|\cdot\|_n ; n=1,2,\cdots\}$ により位相を導入された局所凸空間とする。次の A に対する 4 条件は同値である。

(I)　$\rho(A)\supset\{\lambda\geq\omega\}$ for some $\omega\in\mathbb{R}$, $\overline{D(A)}=X$ かつ $\forall T>0$ に対してある整数 $k(T)\geq 0$ 及び実数 $C=C_T>0$ が存在して，

$$\sup\{\|\lambda^n R(\lambda;A)^n x\| ; 0\leq n/\lambda\leq T,\ \lambda\geq\omega,\ n=1,2,\cdots\}\leq C\|x\|_{k(T)}$$

for $\forall x\in D(A^{k(T)})$。

(II)　$\rho(A)\neq\emptyset$, $\overline{Y}=X$ かつ A の Y への制限 $A|_Y$ は Fréchet 空間 Y 上のある局所同等連続半群の i.g.（[3] 参照）。

(III)　A は X 上のある R.D.S.G. の i.g.（[5] 参照）。

(IV)　$\overline{D(A)}=X$ かつ A の resolvent set $\rho(A)$ はある複素平面上の領域，

$$\Omega=\{\lambda\in\mathbb{C} ; \mathrm{Re}\,\lambda\geq\alpha_0\log|\mathrm{Im}\,\lambda|+\beta_0,\ \mathrm{Re}\,\lambda\geq\omega_0\} \tag{2.4}$$

を含み，A の resolvent $R(\lambda;A)$ は，ある m と $C>0$ が存在して，

$$\|R(\lambda;A)\|\leq C(1+|\lambda|)^m \qquad \lambda\in\Omega \tag{2.5}$$

をみたす。

ここで (III) $\Longleftrightarrow$ (IV) は Chazarain [1], (II) $\Longleftrightarrow$ (III) は Ushijima [14] により示され, (I) $\Rightarrow$ (II) 及び (IV) $\Rightarrow$ (I) はそれぞれ Oharu [8], [9] の中で証明された。

条件 (I) の下で, $\forall T>0$ に対して対応する $k(T)\geq 0$ をとれば指数公式 (2.3) は $0\leq t\leq T$, $x\in D(A^{k(T)})$ に対して収束し, $x\in D(A^{k(T)+1})$ ならば $u(t;x)$ は $(ACP;T,x)$ for A の一意解を与え, さらに $u(t;x)\in C^1([0,T];X)$ である ([8])。

§3. S.G. well posed でない ACP について.

命題 3.1. A を $\overline{D(A)}=X$, $\rho(A)\neq\emptyset$ なる作用素とする。このとき $\forall T>0$ に対して, 整数 $k(T)\geq 0$ が存在して, $\forall x\in D(A^{k(T)+1})$ に対して $(ACP;T,x)$ for A の一意解 $u(t;x)$ が存在したと仮定するならば, A は, $\forall T>0$, $\forall\varepsilon>0$, に対して $M_{T,\varepsilon}>0$ が存在して,

$$(3.1)\qquad \sup\{\|\lambda^n R(\lambda;A)^n x\|;\ 0\leq n/\lambda\leq T-\varepsilon,\ \lambda\geq\omega,\ n=1,2,\cdots\}\leq M_{T,\varepsilon}\|x\|_{k(T)}$$

for $\forall x\in D(A^{k(T)})$ をみたし, 解は指数公式 (2.3) ($0\leq t<T$, $x\in D(A^{k(T)+1})$) で表現される。ここで (3.1) における $k(T)$ は, 命題の仮定の $k(T)$ と同一整数。

定理 3.2. A を $\overline{D(A)}=X$, $\rho(A)\neq\emptyset$ なる作用素とし, $k\geq 0$ を整数とする。このとき $\forall x\in D(A^{k+1})$ に対して, $(ACP;\infty,x)$ for A の一意解 $u(t;x)$ が存在したと仮定するならば, A は (2.1) をみたし, 解は指数公式 (2.3) ($0\leq t<\infty$,

$x \in D(A^{k+1})$) で表現される。ここで (2.1) における k は定理の仮定にある k と同一整数。

命題3.1 は定理A の条件(I) をみたす作用素を形式的に ACP により特徴付けたもので，やや不自然であるが，定理3.2 は命題3.1 の特別な場合とも考えられるので，この節では以下命題3.1 を証明する。

$T>0$ に対して $k(T)$ を命題3.1 の仮定にある様にとる。解作用素 $\{U(t)\}_{0\le t<T}$ を，$D(A^{k(T)+1}) \ni x \longmapsto U(t)x = u(t;x) \in D(A)$，と定義する。次の補題が成立する。

<u>補題 3.3.</u>　すべての整数 $l \ge 1$ に対して，

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^l U(t)x = A^l U(t)x = U(t)A^l x\ ,\quad 0\le t<T,\quad x\in D(A^{k(T)+l+1})。$$

次に閉グラフ定理を用いて，

<u>補題 3.4.</u>　$\forall T>0$，$\forall \varepsilon>0$ に対して $M_{T,\varepsilon}>0$ が存在して，

(3.2) $\| U(t)x \|_1 \le M_{T,\varepsilon} \|x\|_{k(T)+1}$ ，$x\in D(A^{k(T)+1})$，$0\le t\le T-\varepsilon$，

(3.3) $\| U(t)x \| \le M_{T,\varepsilon} \|x\|_{k(T)}$ ，$x\in D(A^{k(T)+1})$，$0\le t\le T-\varepsilon$ 。

(3.3) より解作用素は，$\{U(t)\}_{0\le t<T} \subset \mathcal{B}([D(A^{k(T)})];X)$ と一意的に拡張される。ここで，norm $\|\cdot\|_k$ により $D(A^k)$ を Banach 空間としたものを $[D(A^k)]$ と書いた。又 $Y=\bigcap_{n\ge1} D(A^n)$ を §2，定理B にある様に Fréchet 空間と考えると，$U(t)|_Y$ はすべての $t\ge0$ に対して定義でき，補題3.3，補題3.4 より $U(t)(Y)\subset Y$，$\{U(t)|_Y\}_{t\ge0}$ は局所同等連続 in Y，又すべ

ての $x \in Y$ に対して，$[0,\infty) \ni t \longmapsto U(t)x$ は Y の位相で無限階微分可能で，$U'(0)x = Ax$。さらに解の一意性より，$U(t+s)|_Y = U(t)|_Y \, U(s)|_Y$ for $t, s \geq 0$。故に次の補題の(i)が示された。

<u>補題 3.5.</u> (i) $\{U(t)|_Y\}_{t\geq 0}$ は Y 上の局所同等連続半群で，その i.g. は $A|_Y$。 (ii) $\overline{Y} = X$。

(ii) を示すためには集合

$$Z = \left\{ y \in X \,;\, y = \int_0^T \phi(t)\, U(t)x\, dt,\ \phi \in C_0^\infty(0,T),\ x \in D(A^{k(T)+1}) \right\}$$

が X で稠密で，かつ $Z \subset Y$ となる事を注意すればよい。

ここで *Ushijima* [14] と *Chazarain* [1] の結果（本稿 §2, 定理 B の (II) ⇒ (III) ⇒ (IV)）を用いると，A の *resolvent set* $\rho(A)$ は (2.4) の形をした領域 Ω を含み，A の *resolvent*, $R(\lambda;A)$ に対しては，ある m, $C>0$ が存在して (2.5) の評価を得る。T_0, $0<T_0<T$, を任意に取れば，

$$\int_0^{T_0} e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} U(t)x\, dt = A\int_0^{T_0} e^{-\lambda t}\, U(t)x\, dt$$

$$= e^{-\lambda T_0}\, U(T_0)x - x + \lambda \int_0^{T_0} e^{-\lambda t}\, U(t)x\, dt$$

より，

$$(3.4) \qquad R(\lambda;A)x = \int_0^{T_0} e^{-\lambda t}\, U(t)x\, dt + e^{-\lambda T_0} R(\lambda;A)U(T_0)x$$

$$x \in D(A^{k(T)}), \quad \lambda \in \Omega$$

を得る。 $T_1 > 0$, $\varepsilon > 0$ を $0 < (1+\varepsilon)T_1 < T_0 < T$ をみたす任意の数とする。 $\alpha > \max\left\{ \alpha_0, \dfrac{m+2}{T_0 - (1+\varepsilon)T_1} \right\}$, $\beta > \max\{\beta_0, 0\}$,

$\omega_1 > \max\{\omega_0, \beta\}$,　$\omega > 2\omega_1$,　$\eta_0 = \exp\left(\frac{\omega_1 - \beta}{\alpha}\right)$ (>1)

(ただしここで, $\alpha_0, \beta_0, \omega_0$ は (2.4) における定数) とおいて, 複素平面上の積分路 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ $(\subset \Omega)$ を,

$$\Gamma_1 = \{\zeta = \xi + i\eta\ ;\ \xi = \alpha \log|\eta| + \beta,\ |\eta| \geq \eta_0\}$$

$$\Gamma_2 = \{\zeta = \omega_1 + i\eta\ ;\quad |\eta| \leq \eta_0\}$$

と定め, 下から上へ向きを付ける。 Cauchy の積分表示式より,

$$R(\lambda;A)x = \int_0^{T_0} e^{-\lambda t} U(t)x\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{-\zeta T_0} R(\zeta;A) U(T_0) x}{\lambda - \zeta} d\zeta$$

$$\text{for} \quad x \in D(A^{k(T)}),\quad \lambda > \omega_1 .$$

さらに,

$$\lambda^n R(\lambda;A)^n x = \frac{(-1)^{n-1}\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{n-1} R(\lambda;A)x$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^{T_0} e^{-\lambda t}(-t)^{n-1} U(t)x\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\zeta T_0}\left(1 - \frac{\zeta}{\lambda}\right)^{-n} R(\zeta;A)U(T_0)x\, d\zeta$$

$$\equiv I_1 + I_2 \qquad \text{for } \lambda > \omega_1,\ x \in D(A^{k(T)}),\ n = 1, 2, \cdots .$$

ここで命題3.1 を証明するためには, $C > 0$ が存在して,

(3.5)　$\sup\{\|\lambda^n R(\lambda;A)^n x\|\ ;\ 0 \leq n/\lambda \leq T_1,\ \lambda \geq \omega,\ n = 1, 2, \cdots\} \leq C\, \|x\|_{k(T)}$

が成立する事を示せばよい。

<u>補題 3.6.</u>　$M_{T,T_0} > 0$ が存在して,

$$\|I_1\| \leq M_{T,T_0} \|x\|_{k(T)} .$$

<u>補題 3.7.</u>　$\forall \varepsilon > 0$ に対して, $C_\varepsilon > 0$ が存在して,

$$\left|\left(1 - \frac{\zeta}{\lambda}\right)^{-n}\right| \leq C_\varepsilon\, e^{(1+\varepsilon)T_1 \xi}$$

for $\zeta = \xi + i\eta \in \Gamma$,　$0 \leq n/\lambda \leq T_1$,　$\lambda \geq \omega$,　$n = 1, 2, \cdots$.

(2.5), (3.3), 補題3.7 及び積分路Γの取り方から,

$$\|I_2\| \leq \text{Const.}\|x\|_{k(T)} \cdot \int_\Gamma e^{-\zeta T_0} e^{(1+\varepsilon)T_1\zeta}(1+|\xi|+|\eta|)^m |d\zeta|$$

$$\leq \text{Const.}\|x\|_{k(T)} \left\{ \int_{\eta_0}^{\infty} e^{-(\alpha\log\eta+\beta)(T_0-(1+\varepsilon)T_1)}(1+\eta)^m d\eta + \int_{-\eta_0}^{\eta_0} e^{-\omega(T_0-(1+\varepsilon)T_1)}(1+|\eta|)^m d\eta \right\}.$$

ここで, $\alpha > \max\left\{\alpha_0, \frac{m+2}{T_0-(1+\varepsilon)T_1}\right\}$ である事に注意すれば,

$$\|I_2\| \leq \text{Const.}\|x\|_{k(T)}.$$

ここで得られた$\|I_2\|$の評価と, 補題3.6 より, (3.5)が示された。

§4. ($C_{(k)}$) 半群の特徴付け.

<u>定理4.1.</u> Aを$\overline{D(A)}=X$, $\rho(A)\neq\phi$なる作用素とし, $k\geq1$を整数とする。このとき$\forall x\in D(A^k)$に対して, $u(t;x)\in D(A^k)$ for $t\geq0$, となる様な<u>(ACP_1; ∞, x)</u> for Aの一意解$u(t;x)$が存在したと仮定するならば, Aは半群$\{T(t)\}_{t\geq0}\in$<u>($C_{(k)}$)</u>のc.i.g.となり, $T(t)x=u(t;x)$ for $t\geq0$, $x\in D(A^k)$。

<u>系4.2.</u> Aを$\overline{D(A)}=X$, $\rho(A)\neq\phi$なる作用素として, $k\geq1$を整数とする。このとき$\forall x\in D(A^k)$に対して, $u(t;x)\in D(A^k)$ for $t\geq0$, となる様な<u>(ACP; ∞, x)</u> for Aの一意解が存在したと仮定するならば, Aは半群$\{T(t)\}_{t\geq0}\in$<u>($C_{(k-1)}$)</u>のc.i.g.となり, $T(t)x=u(t;x)$ for $t\geq0$, $x\in D(A^k)$。

<u>(注意)</u> 次の補題が成立する事に注意する。

補題4.3. A を $\rho(A)\neq\phi$ なる作用素，$0<T\leq\infty$ そして $n\geq 1$ を整数とする。次の２条件は同値である。

(1) $(ACP_1;T,0)$ for A の解は $u\equiv 0$ のみ。

(2) $(ACP;T,0)$ for A の解 u の中で，$u(t)\in D(A^n)$ for $t>0$ なるものは $u\equiv 0$ のみ。

この補題により，定理4.1 あるいは系4.2 の仮定の中で，解の一意性に関しては，"$u(t)\in D(A^k)$ for $t>0$ となる解の中で一意" と仮定すれば十分である。

文献

[1] J. Chazarain, Problèmes de Cauchy au sens des distributions vectorielles et applications, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 266 (1968), 10-13.

[2] E. Hille and R.S. Phillips, Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 31 (1957).

[3] T. Kōmura, Semigroups of operators in locally convex spaces, J. Funct. Analy., 2 (1968), 258-296.

[4] S.G. Krein, Linear Differential Equations in Banach Space (in Russian), Nauka, Moscow, 1967.

[5] J. Lions, Les semigroups distributions, Portugal Math., 19 (1960), 141-164.

[6] 宮寺功，抽象的Cauchy問題についての一注意，早稲田大学教育学部，学術研究，21号 (1972).

[7] I. Miyadera, S. Oharu and N. Okazawa, Generation theorems of semigroups of linear operators, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ..

[8] S. Oharu, Semigroups of linear operators in a Banach space, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 7 (2) (1971), 205-260.

[9] S. Oharu, Eine Bemerkung zur Charakterisierung der Distributionenhalbgruppen, to appear in Math. Ann.

[10] 岡沢登，抽象的Cauchy問題の適切性について，数理解析研究所講究録 134, 121-135.

[11] H. Sunouchi, Convergence of semi-discrete difference schemes of abstract Cauchy problems, Tōhoku Math. J., vol. 22 (1970), 394-408.

[12] N. Sanekata, A note on the abstract Cauchy problem in a Banach space, to appear.

[13] T. Takahashi and S. Oharu, Approximation of operator semigroups, to appear in Tōhoku Math. J., 24 (1972).

[14] T. Ushijima, Some properties of regular distribution semigroups, Proc. Japan Acad., 45 (1969), 224-227.

[15] T. Ushijima, On the generation and smoothness of semigroups

of linear operators, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. IA, 19 (1) (1972), 65 - 127.