数理解析研究所講究録
第 184 巻 1973 年 76-84

第II種超伝導体中の Flux Line の形成

大阪市立大. 理. 亀高惟倫

先ず問題と結論及びその物理的背景について書こう。非線型放物型方程式に対する特異境界値, 初期値問題を考える。

(1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)^2 u + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}u - \dfrac{\nu^2}{r^2}u + (1-u^2)u \\ 0 \le u(r,t) \le 1 & (r,t) \in (0,\infty)\times(0,\infty) \\ u(r,0) = u_0(r) & r \in (0,\infty) \end{cases}$$

$\nu > 0$ は問題のパラメーター, 初期値 $u_0(r)$ は $0 \le u_0(r) \le 1$ $r \in (0,\infty)$ をみたす連続函数とする。対応する定常問題は,

(2) $$\begin{cases} w'' + \dfrac{1}{r}w' - \dfrac{\nu^2}{r^2}w + (1-w^2)w = 0 & r \in (0,\infty) \\ 0 \le w(r) \le 1 & \left(' = \dfrac{d}{dr} \right) \end{cases}$$

であって、非線型な Sturm - Liouville の特異境界値問題となる。非線型問題であるが逐次近似で線型問題を解く事に帰着する。それは次の (3), (4) である。

$$
(3)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)^2 u + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} u - \left(\mu + \dfrac{\nu^2}{r^2}\right) u + F(r,t) & (r,t) \in (0,\infty)\times(0,\infty) \\
u(0,t) = 0 , \quad u(\infty,t) : \text{bounded} & \\
u(r,0) = u_0(r) \qquad r \in (0,\infty) & (\mu > 0)
\end{cases}
$$

$$
(4)\quad \begin{cases}
w'' + \dfrac{1}{r} w' - \left(\mu + \dfrac{\nu^2}{r^2}\right) w + F(r) = 0 & r \in (0,\infty) \\
w(0) = 0 , \qquad w(\infty) : \text{bounded} &
\end{cases}
$$

(3), (4) に対し境界点 $r=0$, $r=\infty$ は特異点となっているがその事情を詳しくいえば次の様である。先ず Feller とか McKean は境界点を regular, exit, entrance, natural の4種に分類したが、それに従うと $r=0$,

$r=\infty$ は natural (境界条件は"その近傍で有界に留まる") である。この際は無関係だがついでに言っておくと Weyl の分類では $r=0, \infty$ 共に limit point case. (4) に対して Poincaré の言葉でいうと $r=0$ は確定特異点、$r=\infty$ は1級不確定特異点である。この事は (2) の解の詳しい性質に反映する。以上のような意味で非線型問題 (1), (2) に対しても特異境界値問題という言葉を使った。

主要な結論は

定理 1　(2) は唯一つの非自明解 $w(r)$ を持つ。それは

(i)　$w(r) \in C^2(0,\infty)$

(ii)　$0 < w(r) < 1$　　$r \in (0,\infty)$

(iii)　$1 - w(r) = O(r^{-2})$　as $r \to \infty$

(iv)　$w(r) = u_0(\nu) r^{\nu} + O(r^{\nu+2})$　as $r \to 0$

$$u_0(\nu) = \frac{1}{2\nu}\int_0^{\infty} (1 - w^2(s))\, w(s)\, s^{1-\nu}\, ds$$

(v)　$w'(r) > 0$　　$r \in (0,\infty)$

(vi)　$0 < \nu \leq 1$ なる　$w''(r) < 0$　　$r \in (0,\infty)$

(vii)　$\nu = 1, 2, 3, \cdots$ なる (2) は $u_0(\nu) r^{\nu} + u_1 r^{\nu+1} + \cdots$ の形の形式解を持つがこれは $r \to 0$ のとき $w(r)$ の漸近級数である。

を満たす。証明は [1] にある。

定理 2　(1) は唯一つの大域解を持つ。$u_0(r) \neq 0$ なる、その解 $u(r,t)$ は $t \to \infty$ とするとき $r \in [0,\infty)$ について compact 一様に $w(r)$ に収束する。$w(r)$ は定理 1 にのべた (2) の唯一つの非自明解。

さてこれらの結論の意味する所は表題にかかげた通りであるが、詳しくいうと次の通り。先ず超伝導現象をかいつまんで紹介する。それは 1911 年 K. Onnes が自ら開発した、

ヘリウム液化装置を使って低温における水銀の電気抵抗を測定中に、ある臨界温度T_c以下で電気抵抗が突然ゼロになる事を発見した事に端を発する。すなわちある種の金属及び合金はある臨界温度T_cを越えて温度を下げたとき常伝導状態から超伝導状態に移る。これは熱力学的に相転移であって、超伝導状態は電気抵抗0の他に完全反磁性（Meissner効果）等のいちじるしい性質で特徴付けられ、一言でいって量子効果のマクロな出現という事になっている。この量子効果のマクロな出現を最もよく表わしているのが第II種超伝導体中のFlux Lineである。それは次の様な現象である。ある種の超伝導体（第II種超伝導体）は、ある臨界値H_cよりも弱い磁場をかけるとMeissner効果が少し破れて、磁場が磁束が量子化された磁束線の三角格子という形で超伝導体中にしみ込むという現象である。一本の磁束線(Flux Line)に注目してみよう。それは永久電流の渦でとり囲まれた渦糸であるが渦糸の中心では完全に常伝導状態にあり中心から離れるにつれ超伝導状態に徐々に移行する、十分離れると完全に超伝導状態になっている。この様子を数量化するためには中心からの距りrに対し超伝導の度合いを表わすパラメーター $w(r)$ をrに対しプロットしてみればよい。その時の$w(r)$の変化を記述する局所法則（常微分方程式）とその

境界条件が 1957年 A.A. Abrikosov [2] によって導かれた、すなわち(2)である。$w(r)$ は定理1に示したようにふるまうが参考のため $\nu=1$ の場合の(エネルギーの損得計算から $\nu=1$ のものばかりが実現する、なお実現しうるものは $\nu=1,2,3,\cdots$ に対応する(2)の解だけであってこの事が磁束の量子化という事実に対応する)数値計算の結果(Ginzburg と Pitaevskii による)を示しておこう。

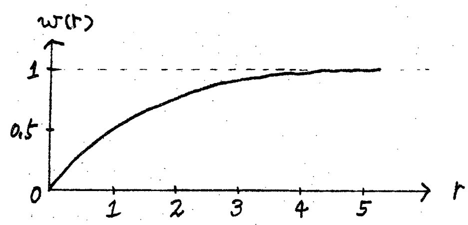

図.1　Ginzburg - Pitaevskii による $\nu=1$ のときの(2)の解 $w(r)$ の数値計算 [3]

ところで元に帰って超伝導の基礎方程式(いわゆる G-L eq.)は1950年 Ginzburg - Landau [4] によって導かれた。それは $|u|^2$ が超伝導の度合いを表わす($|u|\le 1$ であって $|u|=0$ の所が常伝導状態の所, $|u|=1$ の所が完全に超伝導状態の所を表わすものとされている)ような複素数値函数 u と磁場のベクトルポテンシャル $A=(A_1, A_2, A_3)$ のみたす準線型楕円型偏微分方程式系である。u の事を Ginzburg - Landau の order parameter と呼ぶ。Abrikosov

はこの G-L 方程式から出発して (2) を導いたのである。

一方 1966年 Abrahams - Tsuneto [5] は非定常問題を考え、Ginzburg - Landau の order parameter $u(x,t)$ のみたす時間依存方程式を導いた。それは $(T_c - T)/T_c \ll 1$ の仮定の下すなわち臨界温度以下であるが臨界温度に近い所という仮定の下では次の様な非線型拡散方程式である。

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + (1 - |u|^2)\, u$$

次の様に変数分離された (5) の解を考える。

$$(6) \qquad u = u(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t) = u(r\cos\theta, r\sin\theta, t)$$
$$= u(r,t)\, e^{i\nu\theta} \qquad (\nu > 0)$$

この時 $u(r,t)$ の満たす方程式がすなわち (1) である。(2) の解 $w(r)$ に対して $w(r)e^{i\nu\theta}$ は (5) の定常解でもある事に注意しよう。逆にいって Abrikosov の方程式 (2) は Abrahams - Tsuneto の方程式 (5) の定常方程式の一つとしても導かれる事に注意しておこう。以上の背景の説明で明らかになったように定理1の意味する所は (2) は常伝導状態に対応する自明な解 $w \equiv 0$ と Flux line に対応する非自明解 $w(r)$ を持ちこれら以外に解はない。又定理2の意味する所は初期時刻 $t=0$ で Flux Line の芽が少しでもあれば、時

時間がたつにつれてそれは完全な Flux Line（(2)の非自明解）に整形されてしまう。どこにも Flux Line のきっかけがない（$u_0(r)\equiv 0$）ならもちろんなに事も起こらない（$u(r,t)\equiv 0$）。もう一度結論をくり返すと (1) は2つの定常解 0（常伝導状態）と $w(r)$（Flux Line）を持ちこれら以外に定常状態はなく、それらのうち上に述べた意味で、常伝導状態は不安定、Flux Line は安定ということが数学的に証明出来るモデルの一つである。

定理2の詳しい証明はいずれ発表したいと思っているが、ここではほんの少しだけふれておく。(1) において $r=0$, $r=\infty$ が natural という事情から $^\forall L>0$ に対して

$$
(7)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)^2 u + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}u - \dfrac{\nu^2}{r^2}u + (1-u^2)u & (r,t)\in(0,L)\times(0,\infty) \\
u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0 & t\in(0,\infty) \\
u(r,0)=u_0(r) & r\in(0,L)
\end{cases}
$$

$$
(8)\quad
\begin{cases}
w'' + \dfrac{1}{r}w' - \dfrac{\nu^2}{r^2}w + (1-w^2)w = 0 & r\in(0,L) \\
w(0)=0, \quad w(L)=0 & \\
0\le w(r)\le 1 & r\in(0,L)
\end{cases}
$$

という問題を同時に考える。(7), (8) に対しては境界点 $r=L$ は regular であって境界条件として特に Dirichlet 条件を付け

たものを考えている。 (1),(2) と同時に (7),(8) の結論を $L\to\infty$ としたものを合わせ考えると定理2の証明が出来るのであるが、ここでは (1),(2) (7),(8) に対応する基本解とGreen函数が次の様に explicit に出来る事を述べるだけとする。

(9) $$e^{-\mu t}U(r,s,t) = e^{-\mu t}\frac{1}{2t}I_\nu\left(\frac{rs}{2t}\right)e^{-\frac{r^2+s^2}{4t}} \qquad (\mu>0)$$

ただし $I_\nu(z)$ は ν 次変形 Bessel 函数の1つ。

が(1)に対応する基本解であり、

(10) $$G(r,s;\mu) = \begin{cases} I_\nu(\sqrt{\mu}\,r)\,K_\nu(\sqrt{\mu}\,s) & 0<r<s \\ I_\nu(\sqrt{\mu}\,s)\,K_\nu(\sqrt{\mu}\,r) & 0<s<r \end{cases} \qquad (\mu>0)$$

ただし $K_\nu(z)$ も変形 Bessel 函数の1つであって $I_\nu(z)$ と共に変形 Bessel 方程式の基本解系をなす。

が(2)に対応する Green 函数である。

(11) $$G_L(r,s;\mu) = G(r,s;\mu) - \frac{G(r,L;\mu)\,G(s,L;\mu)}{G(L,L;\mu)}$$

が(8)に対応する Green 函数である。上式右辺第2項が正函数である。その Laplace 逆変換（μ にかんする）を $U_L^e(r,s,t)$ とすると (7)に対応する基本解 $e^{-\mu t}U_L(r,s,t)$ は

$$(ろ)\qquad U_L(r,s,t) = U(r,s,t) - U_L^c(r,s,t)$$
$$= U(r,s,t) - \frac{1}{L^2}U_1^c\left(\frac{r}{L},\frac{s}{L},\frac{t}{L^2}\right)$$

補正函数 $U_1^c(r,s,t)$ が詳しくわかればよいがそれは[1]に述べたごとく $G(r,1;\mu)G(s,1;\mu)/G(1,1;\mu)$ の Laplace 逆変換である事から、一般化された Abel の積分方程式の解である。したがって一般的処方箋に従って有界連続核を持つ第2種 Volterra 型積分方程式に帰着する。したがって補正函数 $U_1^c(r,s,t)$ はその Resolvent 核を使って explicit に表わす事が出来、その事から必要な情報が全て得られる。

参考文献

[1] Kametaka, Y. : On a nonlinear Bessel equation, Publ. RIMS Kyoto Univ. 8 (1972) 151–200

[2] Abrikosov, A. A., : On the magnetic properties of superconductors of the second group, Soviet Physics JETP 5 (1957) 1174–1182

[3] Ginzburg, V. L. and L. P. Pitaevskii : On the Theory of superfluidity, Soviet Physics JETP 7 (1958) 858–861

[4] Ginzburg, V. L., and L. D. Landau : On the theory of superconductivity (in Russian) Zh. Eksper. Teor. Fiz. 20 (1950) 1064–1082

[5] Abrahams, E. and T. Tsuneto : Time variation of the Ginzburg-Landan order parameter, Phys. Rev. 152 (1966) 416–432