数理解析研究所講究録
第184巻 1973年 85-99

非線形半群の偏微分方程式への応用

航技研　　高橋匡康

§1. 序

本稿では非線形半群の近似に関する結果とそれの偏微分方程式のCauchy問題への応用を報告する。

これまでに Brezis-Pazy [1], Miyadera [6], Miyadera-Oharu [7] 等により、非線形半群の近似に関していくつかの結果が得られている。我々はここでは差分近似をモデルとした非線形半群の収束定理を与え、そしてその応用として次の1階準線形方程式に対するCauchy問題

$$(\mathrm{CP})\quad \begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(u)_{x_i} = 0 & t>0,\ x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

の差分近似を考察する。

このCauchy問題は Kružkov [5], Kojima [4], Crandall [2] 等により研究されている。特に、Kružkov はより一般的な形の方程式に対するCauchy問題の"解"の存在と一意性に関して

重要な結果を得ている。彼の解の構成法は"vanishing viscosity method"による。Kojimaは同じ問題を差分近似の立場から論じている。一方，Quinn [9] によってこの種の問題の半群理論の立場からの取り扱いの可能性が示された。そして実際，Crandallは半群理論の立場からこの問題を取り扱うことに成功している。本稿の目的は非線形半群の近似理論の立場から(CP)の差分近似を論じることである。

§2. 準備

この節では以下で必要とされる諸概念について簡単にふれておく。

XはBanach空間を表わす。Xに於ける（多価）作用素Aがdissipative operatorであるとは，任意の$u_i \in D(A)$，$v_i \in Au_i$，$i=1,2$，そして任意の$\lambda>0$に対して

(2.1) $$\|u_1-u_2\| \leqq \|(u_1-\lambda v_1)-(u_2-\lambda v_2)\|$$

が成立することをいう。

また，Xに於ける縮小作用素の族$\{J_\lambda ; \lambda>0\}$がpseudo-resolventであるとは，任意の$\lambda, \mu>0$と$u \in D(J_\lambda)$に対して$R(\frac{\mu}{\lambda}+(1-\frac{\mu}{\lambda})J_\lambda) \subset D(J_\mu)$であり，さらに

(2.2) $$J_\lambda u = J_\mu\left[\frac{\mu}{\lambda}u+\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)J_\lambda u\right]$$

となることをいう。

dissipative operator と pseudo-resolvent との関係は次の命題によって示される。

命題2.1. (Oharu [8]).

(i) A を X に於ける dissipative operator とし，$J_\lambda=(I-\lambda A)^{-1}$, $\lambda>0$, とおくと $\{J_\lambda ; \lambda>0\}$ は pseudo-resolvent である。

(ii) $\{J_\lambda ; \lambda>0\}$ を X に於ける pseudo-resolvent とすると，$R(J_\lambda)$ は λ に関して一定であり，各 $\lambda>0$ に対して $J_\lambda=(I-\lambda A)^{-1}$ となるような $D(A)\equiv R(J_\lambda)$ で定義される dissipative operator A が存在する。

さらに，(i)と(ii)に於いて，A の1価性とある J_{λ_0} が injective であることとは同値である。

最後に，非線形半群についてふれよう。C を X の部分集合とする。C からそれ自身への縮小作用素の全体を記号 $\mathrm{Cont}(C)$ でもって表わす。縮小作用素から成る半群の生成に関しては次の定理が知られている (Crandall-Liggett [6])。

定理2.2. (生成定理)

X に於ける dissipative operator A が range condition

$$\text{(R)} \qquad R(I-\lambda A)\supset D(A),\quad \lambda>0$$

を満足しているとする。すると各 $u\in D(A)$ と $t\geq 0$ に対して

$$T(t)u=\lim_{h\to+0}(I-hA)^{-[t/h]}u=\lim_{k\to\infty}(I-\tfrac{t}{k}A)^{-k}u \tag{2.3}$$

となるような半群 $\{T(t);t\geqq 0\}\subset Cont(\overline{D(A)})$ が存在する。さらに，各 $u\in D(A)$ と $t\geqq 0$ に対して次の評価

(2.4) $$\|T(t)u-(I-hA)^{-[t/h]}u\|\leqq 2\sqrt{th}\,|||Au|||$$

が成立する。

§3. 収束定理

この節では差分近似をモデルとした半群の収束定理を与える。得られる結果は [1], [7] に与えられた収束定理の modified version である。

$\{X_m\}_{m\geq 1}$ を X の closed convex set から成る単調増加列，$X_0=\bigcup_{m\geq 1}X_m$ を linear manifold とする。また，$\{C_{m,n}\}_{m,n\geq 1}$ を各 m 毎に $\{C_{m,n}\}_{n\geq 1}\subset Cont(X_m)$ となるような作用素の列，そして，$\{h_{m,n}\}_{m,n\geq 1}$ を各 m 毎に $n\to\infty$ の時 $h_{m,n}\to 0$ となるような正数列とする。さらに，$A_{m,n}=h_{m,n}^{-1}(C_{m,n}-I)$ と定義する。容易にわかるように，各 $A_{m,n}$ は dissipative であり，range condition (R)： $R(I-\lambda A_{m,n})\supset X_m=D(A_{m,n})$，$\lambda>0$，を満足する。従って，定理 1.2 により，各 $A_{m,n}$ は半群 $\{T_{m,n}(t);t\geqq 0\}\subset Cont(X_m)$ を生成する。さらに，各 $u\in X_m$ に対して $T_{m,n}(t)u\in C^1([0,\infty);X)$ で

$$(d/dt)T_{m,n}(t)u=A_{m,n}T_{m,n}(t)u,\quad t\geqq 0$$

であることもわかる。

この様なformulationでもって次の収束定理を得る：

定理 3.1.

$\{X_m\}$, $\{C_{m,n}\}$として$\{A_{m,n}\}$に対して次の条件が満足されているとする：

(C) 各$\lambda>0$と$u\in X_m$に対して収束

$$J_\lambda u = \lim_{n\to\infty} (I-\lambda A_{m,n})^{-1} u$$

が成立するようなpseudo-resolvent $\{J_\lambda;\lambda>0\}\subset \mathrm{Cont}(X_0)$が存在する。

この時、次の結論を得る：

(i) 各$\lambda>0$に対して$J_\lambda=(I-\lambda A)^{-1}$，さらに$R(I-\lambda A)=X_0\supset D(A)$となるようなdissipative operator Aが存在する。

(ii) Aは半群$\{T(t);t\geqq 0\}\subset \mathrm{Cont}(\overline{D(A)})$を生成し，集合$X_0\cap\overline{D(A)}$は各作用素$T(t)$のもとでinvariantである。

(iii) 各$u\in X_m\cap\overline{D(A)}$と$t\geqq 0$に対して収束

$$\lim_{n\to\infty} T_{m,n}(t)\,u = T(t)\,u$$

が成立する。ここにこの収束は各compact t-interval上一様に成り立つ。

(iv) 各$u\in X_m\cap\overline{D(A)}$と$t\geqq 0$に対して収束

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \nu h_{m,n}\to t}} \overset{\nu}{C}_{m,n}\, u = T(t)\,u$$

が成立する。

系 3.2.

定理3.1の条件(C)に加えて、次の条件が満足されるものとする:

(C_1) ある1価の作用素 A_1 とある集合 $D \subset X_0$ が存在して各 $u \in X_m \cap D$ に対して収束

$$\lim_{n\to\infty} A_{m,n} u = A_1 u \in X_0$$

が成立する。

この時、$D \subset D(A)$ であり各 $u \in D$ に対して $A_1 u \in A u$ が成立する。従って、もし D が X_0 に於いて dense であるならば定理3.1の結論 (ii), (iii) そして (iv) に於ける集合 $X_0 \cap \overline{D(A)}$, $X_m \cap \overline{D(A)}$ はそれぞれ X_0, X_m によっておきかえることができる。

§4. 差分近似

以下では、次のCauchy問題を論じる:

$$(\mathrm{CP}) \quad \begin{cases} u_t + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \varphi_i(u)_{x_i} = 0 & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \\ u|_{t=0} = u_0(x). \end{cases}$$

ここに、各 φ_i が class $C^1(\mathbb{R}^1)$ に属し、$\varphi_i(0) = 0$ となることを仮定する。

Kružkov と Kojima は空間 $L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}^d)$ に於いて(CP)を論じている。我々はここでは、Crandall と同じように空間 $L^1 = L^1(\mathbb{R}^d)$

に於いて (CP) を論じることにする。

(CP) の解は、Kružkov にならい、次の定義の意味で考えることにする。

定義 4.1.

$u_0 \in L^1 \cap L^\infty$ とする。今 $[0,\infty)$ で定義された $L^1 \cap L^\infty$-値関数 $u(t) \equiv u(t;\cdot)$ が初期値 u_0 をもつ (CP) の一般化された解であるとは、次の3条件が成立することをいう:

(G.1) $\|u(t)\|_\infty$ は $[0,\infty)$ 上で一様有界。

(G.2) 任意の実数 k と非負関数 $f \in C_0^\infty((0,\infty)\times \mathbb{R}^d)$ に対して

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Big\{ |u(t,x)-k|\, f_t(t,x) + \operatorname{sign}(u(t,x)-k) \sum_{i=1}^d [\varphi_i(u(t,x)) - \varphi_i(k)]\, f_{x_i}(t,x) \Big\} dx\,dt \geqq 0$$

(G.3) $u(t)$ は $[0,\infty)$ 上強連続で、$\displaystyle\lim_{t\to+0} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x) - u_0(x)|\,dx = 0$.

さて、定理 3.1 を適用して、(CP) の一般化された解を差分近似の立場から構成しよう。そのために、(CP) に対して次のような Friedrichs type の近似差分系を考える:

$$(\mathrm{DS}) \begin{cases} h^{-1}\Big[u^{\nu+1}(x) - (2d)^{-1} \displaystyle\sum_{i=1}^d \big(u^\nu(x+le_i) + u^\nu(x-le_i) \big) \Big] \\ \qquad + (2l)^{-1} \displaystyle\sum_{i=1}^d \big[\varphi_i(u^\nu(x+le_i)) - \varphi_i(u^\nu(x-le_i)) \big] = 0 \\ \qquad\qquad h, l > 0,\ x \in \mathbb{R}^d;\ \nu = 0,1,2,\cdots \\ u^0(x) = u_0(x) \end{cases}$$

これに応ずる差分作用素 $C_{h,l}$, $h, l > 0$, を

$$(4.1)\qquad [C_{h,\ell}u](x) = (2d)^{-1}\sum_{i=1}^{d}\left(u(x+\ell e_i)+u(x-\ell e_i)\right)-\frac{h}{2\ell}\sum_{i=1}^{d}[\varphi_i(u(x+\ell e_i))-\varphi_i(u(x-\ell e_i))]$$

によって定義する。ここに $D(C_{h,\ell})=\{u\in L^1;\ C_{h,\ell}u\in L^1\}$ である。これによって (DS) は次の様に書き直すことができる.

$$(\mathrm{DS}')\qquad u^{\nu}=C_{h,\ell}^{\nu}u_0,\qquad \nu=0,1,2,\cdots$$

次に,

$$X_m=\{u\in L^1\cap L^\infty;\ \|u\|_\infty\leqq m\},\quad m=1,2,3,\cdots$$

$$X_0=\bigcup_{m\geqq 1}X_m=L^1\cap L^\infty$$

とおく。さらに

$$M_m=\max_{1\leqq i\leqq d}\ \sup_{|s|\leqq m}|\varphi_i'(s)|$$

とおく。また, 正数列 $\{\delta_m\}$ を $\delta_m\leqq\frac{1}{dM_m}$ となる様にとる。この様な数列 $\{M_m\}$ と $\{\delta_m\}$ に対して正数よりなる2重数列 $\{h_{m,n}\}$ と $\{\ell_{m,n}\}$ を次の様にとる: 各 m を固定する毎に

$$h_{m,n},\ \ell_{m,n}\to 0\quad (n\to\infty)$$

$$(4.2)\qquad \delta_m\leqq h_{m,n}/\ell_{m,n}\leqq 1/dM_m,\quad (n\geqq 1).$$

すると, $C_{h_{m,n},\ell_{m,n}}$ は X_m 上で well-defined であるから

$$(4.3)\qquad \begin{cases} C_{m,n}=C_{h_{m,n},\ell_{m,n}}\,|\,X_m\\ A_{m,n}=h_{m,n}^{-1}(C_{m,n}-I)\end{cases}$$

と定義することができる。

定理3.1と系3.2を適用して, 次の定理を証明できる:

定理4.2.

$\{C_{m,n}\}$と$\{A_{m,n}\}$を(4.3)で定義された様な差分作用素とすると以下のことが成立する：

(i) 定義域が$C_0^1(\mathbb{R}^d) \subset D(A) \subset X_0$となるような$L^1$に於ける1価のdissipative operator Aが存在する，さらに，各$u \in D(A)$に対して

$$Au = -\sum_{i=1}^{d} \varphi_i(u)_{x_i}$$

となる。ここで微分は超関数の意味で考える。

(ii) 任意の$\lambda > 0$と$u \in X_m$に対して収束

$$(I - \lambda A)^{-1} u = \lim_{n \to \infty} (I - \lambda A_{m,n})^{-1} u$$

が成立し，$(I-\lambda A)^{-1}u$は偏微分方程式

$$v + \lambda \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(v)_{x_i} = u \quad , v \in D(A)$$

の解を与える；この事実は，$R(I-\lambda A) = X_0$，$\lambda > 0$，であることを示している。

(iii) 各$u \in X_0$に対して収束

$$T(t)u = \lim_{k \to \infty} (I - \tfrac{t}{k} A)^{-k} u$$

が成立し，極限作用素$T(t)$，$t \geq 0$，はX_0上のL^1-contractive semigroup $\{T(t) ; t \geq 0\}$を成す。そして$u(t,x) = [T(t)u](x)$は定義4.1の意味での(CP)の一意な一般化された解となる。

(iv) 各$u \in X_m$に対して，$n \to \infty$，$\nu h_{m,n} \to t$とするとき$\check{C}_{m,n}^{\nu} u$は$T(t)u$に強収束する。

§5. 定理4.2の証明.

定理4.2を証明するために，いくつかの補題を準備しよう。次の補題は(DS)に対するstability conditionであると考えられる。

補題5.1.

各m毎に，$\{C_{m,n}\}_{n\geq 1} \subset \mathrm{Cont}(X_m)$．さらに

$$\| C_{m,n} u\|_p \leq \|u\|_p \quad , \quad u\in X_m,\quad m,n\geq 1,\quad p=1,\infty$$

が成立する。

次に，notationを簡単にするために次の記号を導入する．$\mathbb{R}^d$上の実数値関数$u(x)$に対して

$$[D_i^0 u](x) = (2\ell)^{-1}[u(x+\ell e_i)-u(x-\ell e_i)]$$

$$(5.1)\qquad [D_i^+ u](x) = \ell^{-1}[u(x+\ell e_i)-u(x)]$$

$$[D_i^- u](x) = \ell^{-1}[u(x)-u(x-\ell e_i)] \quad , \quad \ell>0,\ x\in\mathbb{R}^d$$

と表わす。この時，

$$[D_i^- D_i^+ u](x) = \ell^{-2}[u(x+\ell e_i)-2u(x)+u(x-\ell e_i)]$$

となる。また，$u\in L^1$と$f\in L^\infty$とのpairingを$\langle u,f\rangle$でもって表わす。これらのnotationのもとで次の評価を得る。

補題5.2.

$u\in X_m$とすると，$|k|\leq m$となる様な任意の定数kと非負関数$f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$に対して

(5.2) $< \mathrm{sign}(u-k) A_{m,n} u, f >$

$$\leq (2d)^{-1} \sum_{i=1}^{d} < |u-k|, \frac{l^2}{h} D_i^- D_i^+ f > + \sum_{i=1}^{d} < \mathrm{sign}(u-k)(\varphi_i(u)-\varphi_i(k)), D_i^0 f >$$

が成立する。

注意. 補題5.2の証明から次のことがわかる。

$v \in X_m$ とし，$f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $f(x)$, $f_{x_i}(x)$, $i=1,2,\cdots,d$, が $\mathbb{R}^d$ で一様有界となるような非負関数とすると，次の評価式が得られる：

(5.3) $$< \mathrm{sign}(v) A_{m,n} v, f > \leq \left(\frac{1}{d\delta_m} + M_m\right)\left(\sum_{i=1}^{d} \sup_x |f_{x_i}(x)|\right) \|v\|_1 .$$

(5.3)の評価を用いて次の結果を得る：

補題5.3.

$u \in X_m$, $\lambda > 0$ とすると $v_n = (I-\lambda A_{m,n})^{-1} u$, $n=1,2,3,\cdots$, に対して次の評価が成立する：

(i) $\|v_n\|_p \leq \|u\|_p$, $n \geq 1$, $p = 1, \infty$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}^d} |v_n(x+y) - v_n(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(x+y) - u(x)| dx$, $y \in \mathbb{R}^d$, $n \geq 1$.

(iii) n に関して一様に $\rho \to +\infty$ とする時 $\int_{|x|>\rho} |v_n(x)| dx \to 0$.

これらの事実は列 $\{(I-\lambda A_{m,n})^{-1} u\}_{n\geq 1}$ が L^1 に於いて conditionally compact であることを示している。

補題5.4.

$u, v \in X_m$, $\lambda > 0$, $p \geq m$ とする。そして $w_n = (I-\lambda A_{m,n})^{-1} u$,

$z_n = (I - \lambda A_{p,n})^{-1} v$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, とおく。w と z をそれぞれ $\{w_n\}$ と $\{z_n\}$ の cluster point とするならば

$$(5.4) \qquad \|w - z\|_1 \leqq \|u - v\|_1$$

が成立する。この事実は特に、各 $u \in X_m$ と $\lambda > 0$ に対して、$\{(I - \lambda A_{m,n})^{-1} u\}_{n \geqq 1}$ が L^1 に於いて収束列であり、その極限が m に依存しないことを示している。

補題 5.1 ~ 5.4 から次の定理が得られる:

定理 5.5.

(i) 任意の $u \in C_0^1(\mathbb{R}^d) \cap X_m$ に対して収束

$$(5.5) \qquad \lim_{n \to \infty} A_{m,n} u = -\sum_{i=1}^{d} \varphi_i(u)_{x_i} = -\sum_{i=1}^{d} \varphi_i'(u) u_{x_i}$$

が成立する。ここで微分は通常の意味での微分である。

(ii) 任意の $\lambda > 0$ と $u \in X_m$ に対して収束

$$(5.6) \qquad J_\lambda u = \lim_{n \to \infty} (I - \lambda A_{m,n})^{-1} u$$

が成立するような pseudo-resolvent $\{J_\lambda ; \lambda > 0\} \subset \mathrm{Cont}(X_0)$ が存在する。さらに、各 $\lambda > 0$ と $u \in X_0$ に対して $J_\lambda u$ は偏微分方程式

$$(5.7) \qquad u = v + \lambda \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(v)_{x_i}$$

の解を与える。ここに微分は超関数の意味で考える。

定理 5.5 は、定理 3.1 の条件(C)、そして $D = C_0^1(\mathbb{R}^d)$ に対し

て系3.2の条件(C_1)が成立することを示している。従って、$C_0^1(\mathbb{R}^d) \subset D(A) \subset L^1 \cap L^\infty$, $J_\lambda = (I-\lambda A)^{-1}$, $\lambda>0$, となるような dissipative operator A が存在する。また(5.7)から各 J_λ は injective である。従って、命題1.1により A は1価である。以上のことから、定理3.1と系3.2を用いて、定理4.2の結論は(iii)を除いてすべて証明された。各 $u \in X_0$ に対して、$u(t,x) = [T(t)u](x)$ が(CP)の一般化された解となることは、(iii)の収束あるいは(iv)の収束を用いて証明できる。

§6. Crandall の結果との関係

最後に、上で得られた結果と Crandall の結果との関係を述べておこう。Crandall は次の様な作用素 A_0 を導入している。

<u>定義 6.1.</u>

$u \in D(A_0)$ であって $v \in A_0 u$ であるとは、$u, v \in L^1$ であって $\varphi_i(u) \in L^1$, $i=1,2,\cdots,d$, となり、任意の非負関数 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ と任意の実数 k に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{sign}(u(x)-k)\left\{\sum_{i=1}^{d}[\varphi_i(u(x))-\varphi_i(k)]f_{x_i}(x) + v(x)f(x)\right\}dx \geq 0$$

となることをいう。

A_0 は一般に多価である。Crandall は各 φ_i が class $C^1(\mathbb{R}^1)$ に属し $\varphi_i(0)=0$ であるとき $-\overline{A_0}$ が L^1 に於いて m-dissipative であ

ることを示し，定理1.1を用いて L^1 上の半群 $\{T(t); t\geq 0\}\subset \mathrm{Cont}(L^1)$ を構成している。さらに，初期値 u が $L^1\cap L^\infty$ に属するときには，$u(t,x)=[T(t)u](x)$ が (CP) の一般化された解となることを示している。

定理4.2 に於いて得られた作用素 A は定義 6.1 で述べた作用素 A_0 と次の関係をもつ：

<u>命題 6.2.</u>

$D(A)=\{u\in D(A_0);\ u,\ A_0u\in L^\infty\}$，そして $A=-A_0|D(A)$ が成立する。

この命題から $\overline{A}=-\overline{A_0}$ となり，両者は L^1 に於いて m-dissipative である。そして定理4.2 (iii) に於いて得られた半群 $\{T(t); t\geq 0\}$ を L^1 全体に拡張したものは Crandall の半群と一致する。以上の結果の詳しい証明並びに詳しい議論については [10] を参照されたい。

References

[1] H. Brezis and A. Pazy, Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces, J. Func. Anal., 9 (1970), 63-74.

[2] M. Crandall, The semigroup approach to first order quasilinear equations in several space variables, to appear in Israel J. Math..

[3] M. Crandall and T. Liggett, Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces, Amer. J. Math., 93 (1971), 265-298.

[4] K. Kojima, in preparation.

[5] S. N. Kružkov, First order quasilinear equations in several independent variables, Math. USSR Sbornik, 10 (1970), 217-243. (Russian).

[6] I. Miyadera, On the convergence of nonlinear semi-groups, II, J. Math. Soc. Japan, 21 (1969), 403-412.

[7] I. Miyadera and S. Oharu, Approximation of semigroups of nonlinear operators, Tôhoku Math. J., 22 (1970), 24-47.

[8] S. Oharu, On the generation of semigroups of nonlinear contractions, J. Math. Soc. Japan, 22 (1970), 526-550.

[9] B. Quinn, Solutions with shocks: An example of an L^1-contractive semigroup, Comm. Pure. Appl. Math., 24 (1971), 125-132.

[10] S. Oharu and T. Takahashi, A convergence theorem of nonlinear semigroups and its application to first order quasilinear equations, to appear.