

非線形干渉による Cascade process

東大宇航研 本橋 龍 郎
田 中 航 二
佐 藤 浩

§ 1. 序

前回の報告⁽¹⁾では、平板の後流では流れの非線形領域が、3つの部分に分けて考えられること、偶数次、奇数次同志のフーリエ成分(変動分の)の分布に相似性が成立すること、および“位相のゆらぎ”が流れ方向に増大することなどを示した。今回は Reynolds stress および Integrated energy (流れに垂直方向に変動分のエネルギーを積分した値)を用いて非線形領域で主流と変動分のエネルギーのやりとりがどのように行なわれているかを研究した。

§ 2. 流れ関数による Reynolds stress の表現

流れが2次元であると考えると、流れ関数 $\psi(x, y, t)$ を用

いて流れの場を表現する。速度場 $\vec{u} = (u, v, 0)$ は、

$$u = \bar{u} + \hat{u} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\Psi}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\Psi}(x, y, t)}{\partial y} \quad (1)$$

$$v = \bar{v} + \hat{v} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{\Psi}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\Psi}(x, y, t)}{\partial x} \quad (2)$$

となる。ここでバーは、平均量を示しキャップは変動分を示す。

Ψ を次のように分解する、

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, t) &= \bar{\Psi}(x, y) + \hat{\Psi}(x, y, t) \\ &= \phi_0(x, y) + \sum_{j=1} (\phi_{js}(y) \sin(j\theta) + \phi_{jc}(y) \cos(j\theta)) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\theta = \alpha(x - c_r t)$$

α : 基本成分の波数

c_r : " の位相速度

x : 平板後縁からの距離

y : 流れに垂直方向(後縁が原点)

(3)式を(1), (2)に代入すると、

$$u = \phi_0'(x, y) + \sum_j (\phi_{js}'(y) \sin(j\theta) + \phi_{jc}'(y) \cos(j\theta)) \quad (4)$$

$$v = \frac{\partial \phi_0}{\partial x}(x, y) + \sum_j (j\alpha) (\phi_{jc}(y) \sin(j\theta) - \phi_{js}(y) \cos(j\theta)) \quad (5)$$

プロファイルは y に関する微分をあらわす。したがって Reynolds stress のうち最も重要な項 $-\rho \overline{\hat{u} \hat{v}}$ は、

$$-\rho \overline{\hat{u} \hat{v}}(y) = -\frac{\rho \alpha}{2} \sum_j j (\phi_{js}' \phi_{jc} - \phi_{jc}' \phi_{js}) \quad (6)$$

となる。

Reynolds stress は主流と変動分の間の相互作用をあらわしている。この値と $2U/2y$ の積の符号の正負によってエネルギーが主流から変動分へ、変動分から主流へと流れることを示す。(ここで U は wake の平均流である)

いま第 2 高調波まで考えに入れるとすると、実験データは

$$\hat{u}_E = \sqrt{u_1^2} \sin(\omega t + \theta_1(x, y)) + \sqrt{u_2^2} \sin(2\omega t + \theta_2(x, y))$$

u_1, θ_1 ; 基本成分の振幅, 位相 ω : 基本成分の角周波数⁽⁷⁾

u_2, θ_2 ; 第 2 高調波の振幅, 位相

に分解でき、振幅と位相の値が得られる。^(注1) (4), (5)式と比較すると、

$$\phi'_{jc} = \sqrt{u_j^2} \sin(\theta_j + j\alpha x) \quad (8)$$

$$\phi'_{js} = \sqrt{u_j^2} \cos(\theta_j + j\alpha x) \quad (j=1, 2)$$

とえる。そして、 $\phi_{js}, \phi_{jc}, \phi''_{js}, \phi''_{jc}$ は (8) の分布より求めることができる。つぎに Integrated energy を考える。Integrated energy は y -方向に各フーリエ成分の 2 乗振幅を、

$y=-\infty$ から $y=+\infty$ に積分したもので、

$$E_i = 2 \int_0^\infty \frac{\bar{u}_i^2}{U_0^2} dy \quad (i=1, 4) \quad (9)$$

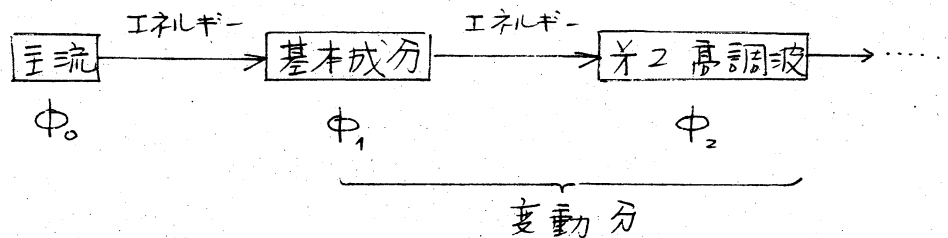
を示す。全エネルギーは $E_0 = \sum_{i=1}^4 E_i$ であらわろ。

注1. 位相は $x = 40 \text{ mm}$, $y = 9.0 \text{ mm}$ での値を基準にとった。

§3. エネルギーの流れ.

エネルギーのやりとりのパターンとしては、2つの基本型が考えられる。1つはエネルギーが、主流から基本成分へ、基本成分から第2高調波へ、第2高調波から……と段階的に送られていくものでこれを cascade process と呼ぶ。他の1つは主流と直接変動分の基本成分や高次の高調波との間にエネルギーのやりとりがある場合でここでは parallel process と呼ぶ。(以下の図を参照)

(A) Cascade process



(B) Parallel process.

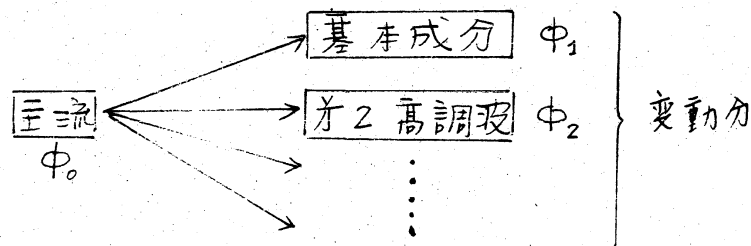


図 エネルギーのやりとりの2つの基本型

我々の問題は平板の後流の中のどの領域でエネルギーのやりとりが cascade 的あるいは parallel 的かを示すことである。

§ 4. 実験データによる計算⁽²⁾

図1は平板の後流における平均流分布の中心速度 U_c と分布の中りの流れ方向の変化を示したものである。外部から単色音を加えて、その周波数の速度変動が誘起されている。

図に矢印で示した3点 ($X = 40\text{ mm}$, 60 mm , 90 mm) において Reynolds stress を式(6)にもとづいて実験データを代入して計算した。 $X = 40\text{ mm}$ の点では後流の中が広がりつつあり変動分のエネルギーや U_c/U_0 などは増加の傾向にある。

又この点は線形領域から非線形領域へ移行する途中にある。 $X = 60\text{ mm}$ では後流の中が最大に広がり変動分のエネルギーはすでに減少の傾向を示している。この点は位相分布、振巾分布及びほぼ平衡状態になっている。 $X = 90\text{ mm}$ では基本成分に較べて高調波成分が増大し強い非線形性がみられる。

図2-4は、上記の3点での位相、振巾分布をもとにして ϕ'_{1c} , ϕ'_{1s} を計算したものである。さらに全変動分による Reynolds stress を図5に示す。図5からわかるようにこれらの値は全域において負となっている。これは主流から変動分へのエネルギー流れが起っていることをあらわしている。

基本成分による Reynolds stress への寄与は図6に示されているが $X = 90\text{mm}$ においては中心付近で正になっていて、基本成分の変動エネルギーが主流へ逆に流れこんでいることを示している。第2高調波では $X = 40\text{mm}$ までで Reynolds stress への寄与が正になり負になりしている。このことは複雑な主流とのエネルギー交換を示している。 $X = 90\text{mm}$ では中心付近で主流から第2高調波成分へ後流の境界付近で第2高調波成分から主流へのエネルギー流れが起っている。

各フーリエ成分の2乗振やを Y -方向に積分した値が、流れ方向にどのように変化するかを示したのが図8である。

$X = 40\text{mm}$ 付近では、全変動エネルギー E_0 は増加しそれと共に他のフーリエ成分も増加している。従ってこの領域では parallel process が進行していると考えられる。 $X = 40\text{mm} \sim 60\text{mm}$ 付近までは E_0 および基本成分のエネルギー E_1 は減少しているにもかかわらず、他のフーリエ成分は増加している。

従ってここでは cascade process が存在すると考えられる。また $X = 60\text{mm} \sim 90\text{mm}$ では E_0 もすべてのフーリエ成分のエネルギーも減少している。従ってここでは変動分から主流へのエネルギー流れが parallel 的に生じているものと考えられる。 100mm の近くでは E_0 および基本成分の減少と高調波成分の増大という cascade process が存在し、 $X = 120\text{mm}$

ではすべての成分が減りうるので parallel process が存在するであろう。

§ 5. 結論

平板後流の非線形領域でのエネルギー流れはきわめて複雑で簡単な議論は出来ない。しかし、

(1) 線形領域から非線形領域へ移行する領域では parallel process が存在するように思える。($x \sim X = 40 \text{ mm}$)

(2) 非線形領域の最初、即ち弱非線形性を示す領域では cascade process が存在する。($X = 40 \text{ mm} \sim 60 \text{ mm}$)

(3) 強い非線形性が見られる。 $X = 60 \text{ mm} \sim 90 \text{ mm}$ では変動分から主流へのエネルギーの流れが parallel 的に生じているものと考えられる。

(4) 非線形平衡領域の直前では parallel process と cascade process が共存しているようである。

(5) 第2高調波による Reynolds stress への寄与は非線形領域では主に中心線付近で主流から第2高調波へのエネルギー流れが生じ、後流の境界付近で第2高調波から主流へのエネルギー流れが起る。

(6) 高次のフーリエ成分による Reynolds stress に対する寄与は空間的に複雑な分布をしている。

§ 6. 参考文献

- (1) 本橋龍郎, 斎藤博之助, 佐藤浩: 数理解析研究所講
究録 171 730 (1973)
- (2) H. Sato : J.F.M vol 44 741 (1970)

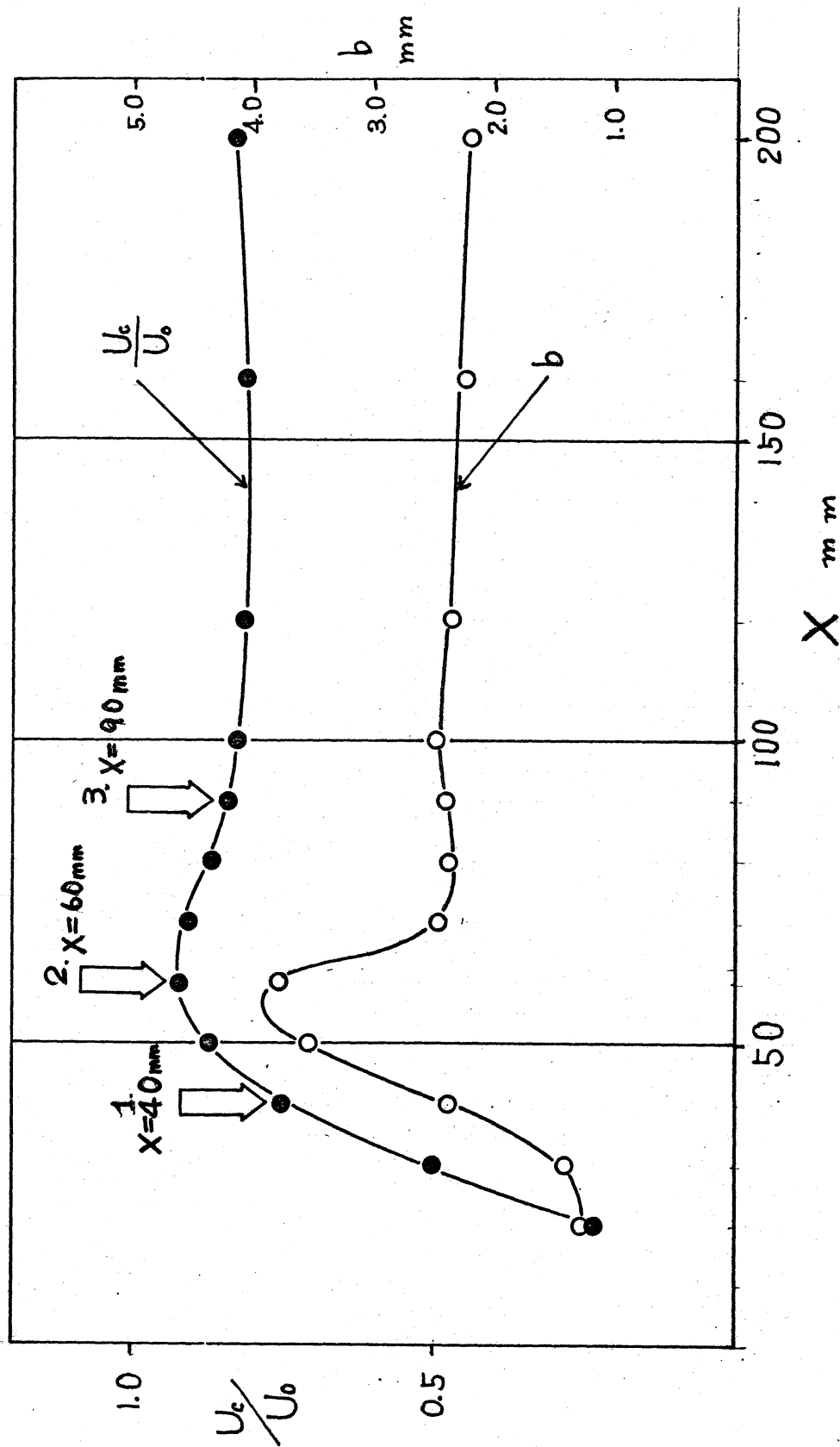


図1. 平均流分布の中心速度 U_c および後流の半値中 b の流れ方向の変化.

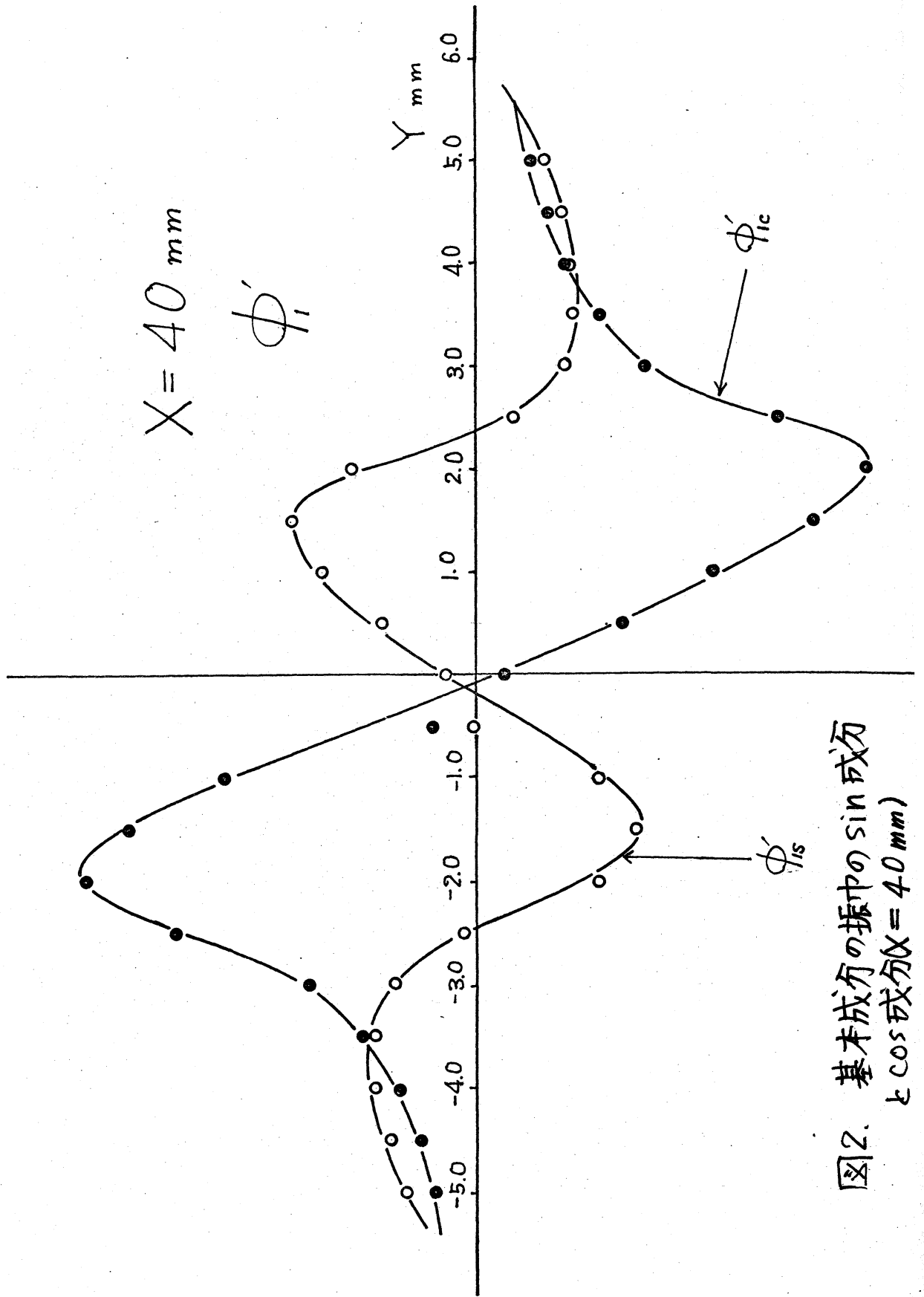


図2. 基本成分の振中の sin 成分
と cos 成分 ($X = 40 \text{ mm}$)

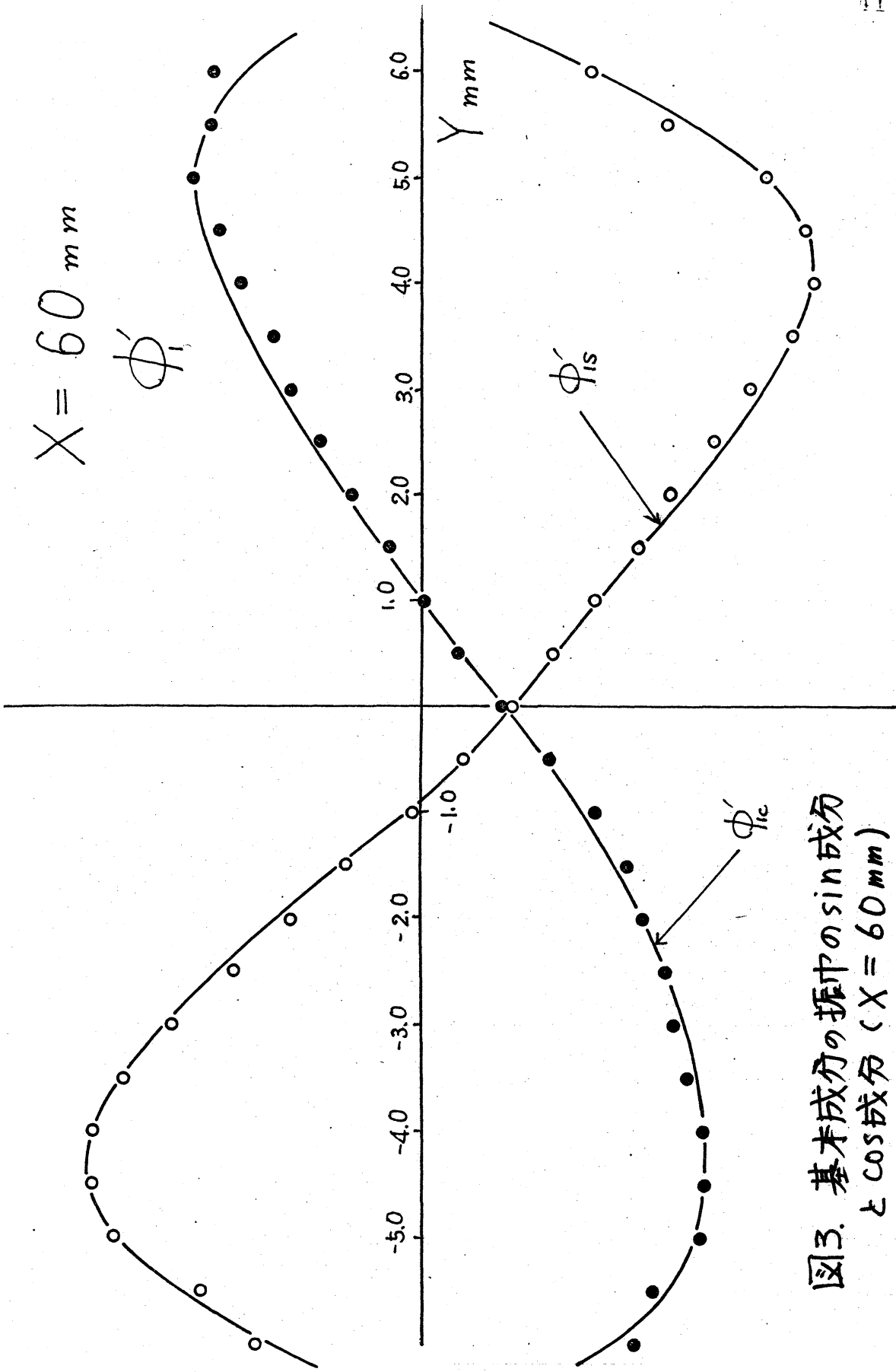


図3. 基本成分の振中のsin成分
とcos成分 ($X = 60 \text{ mm}$)

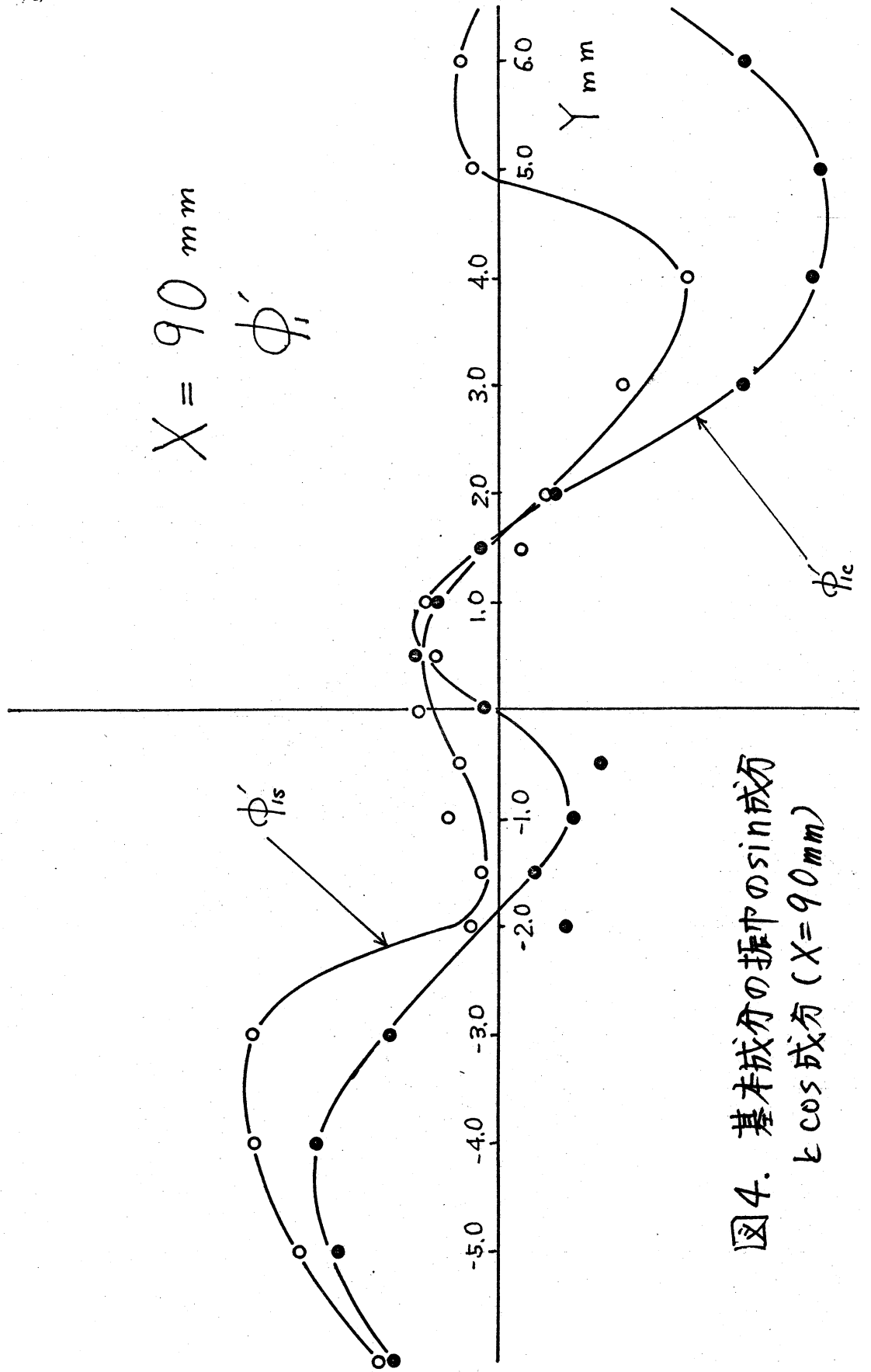


図4. 基本成分の振中のsin成分
とcos成分 ($X = 90 \text{ mm}$)

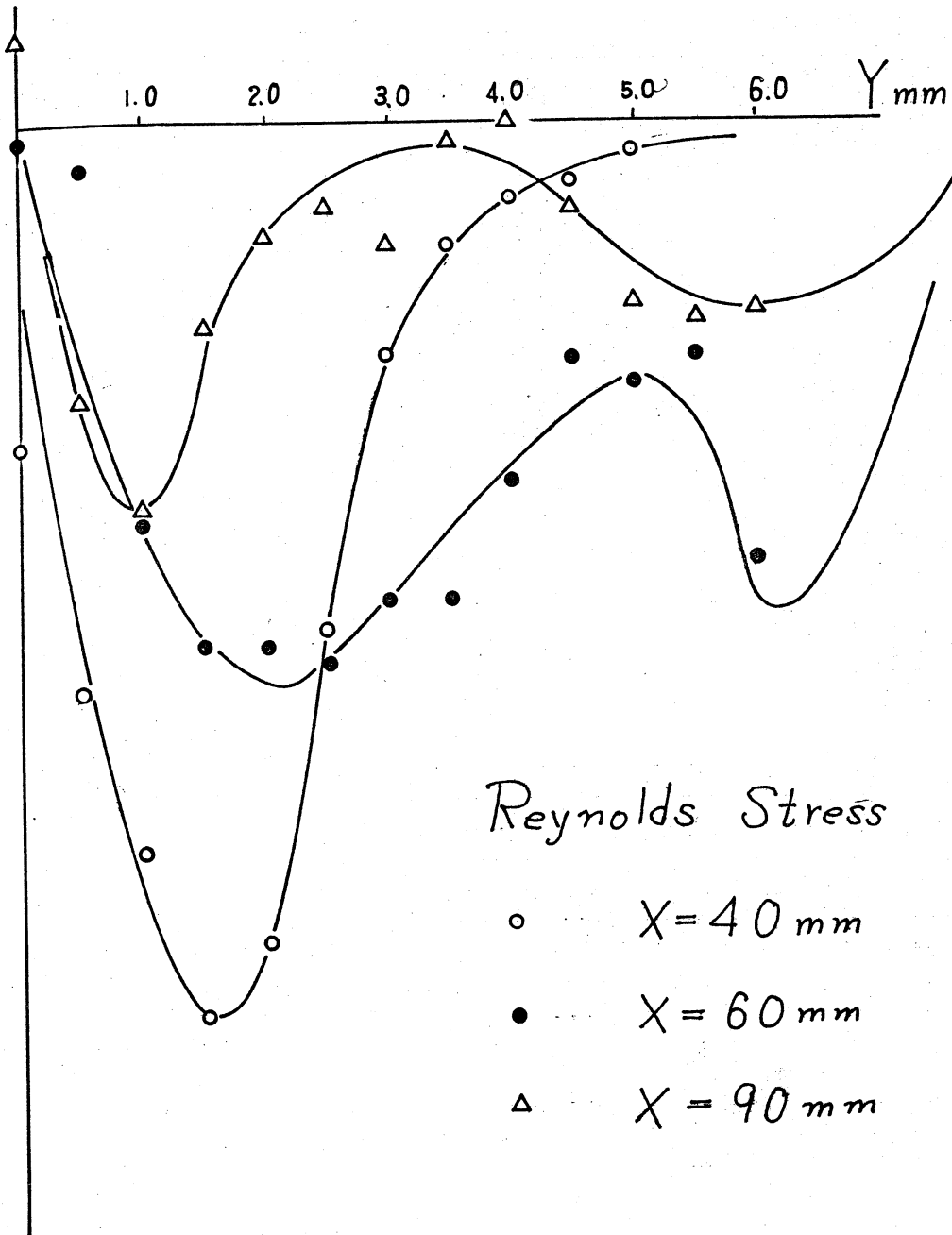


图5. Reynolds stress

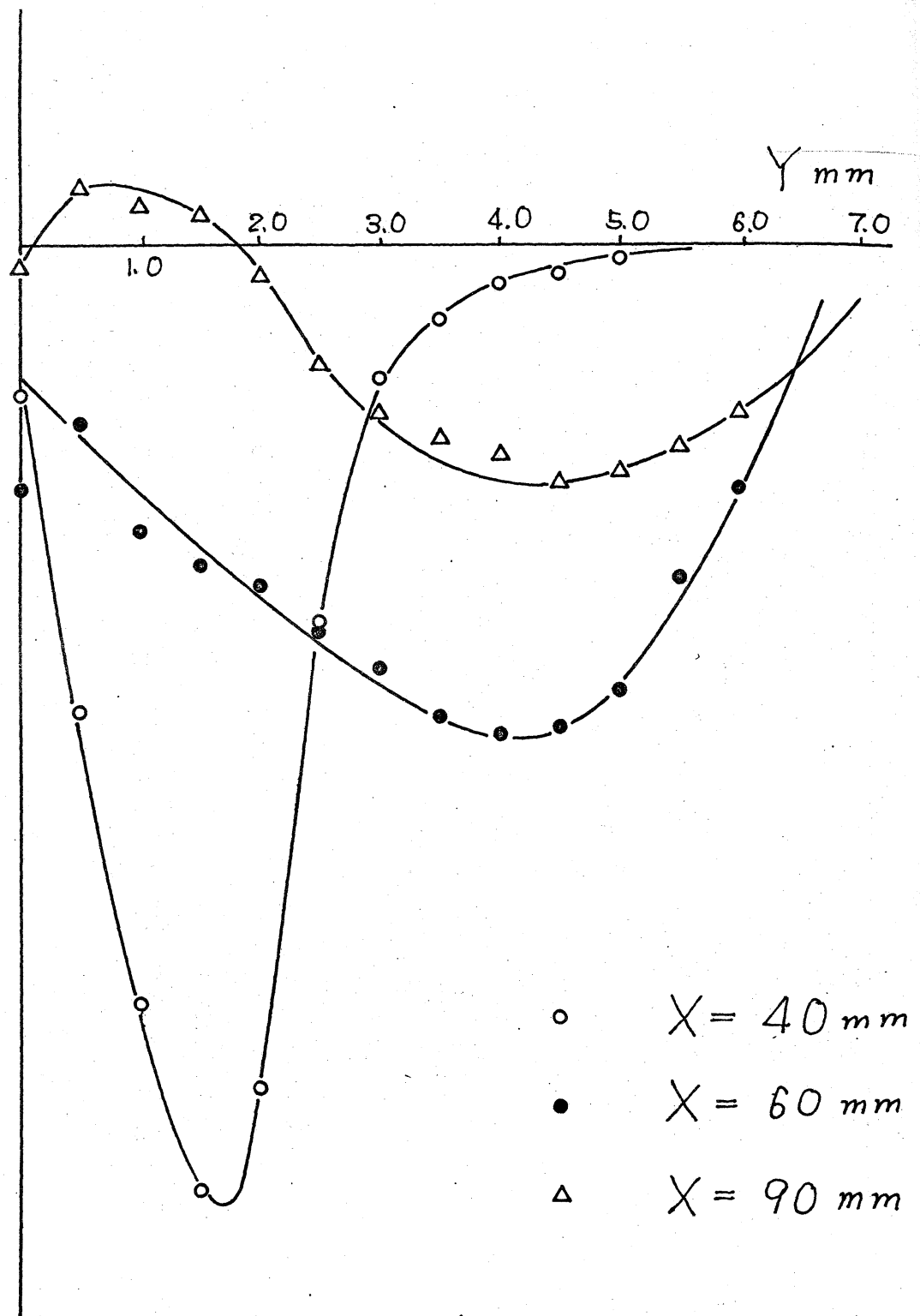


図6. 基本成分に於る Reynolds stress λ の寄与.

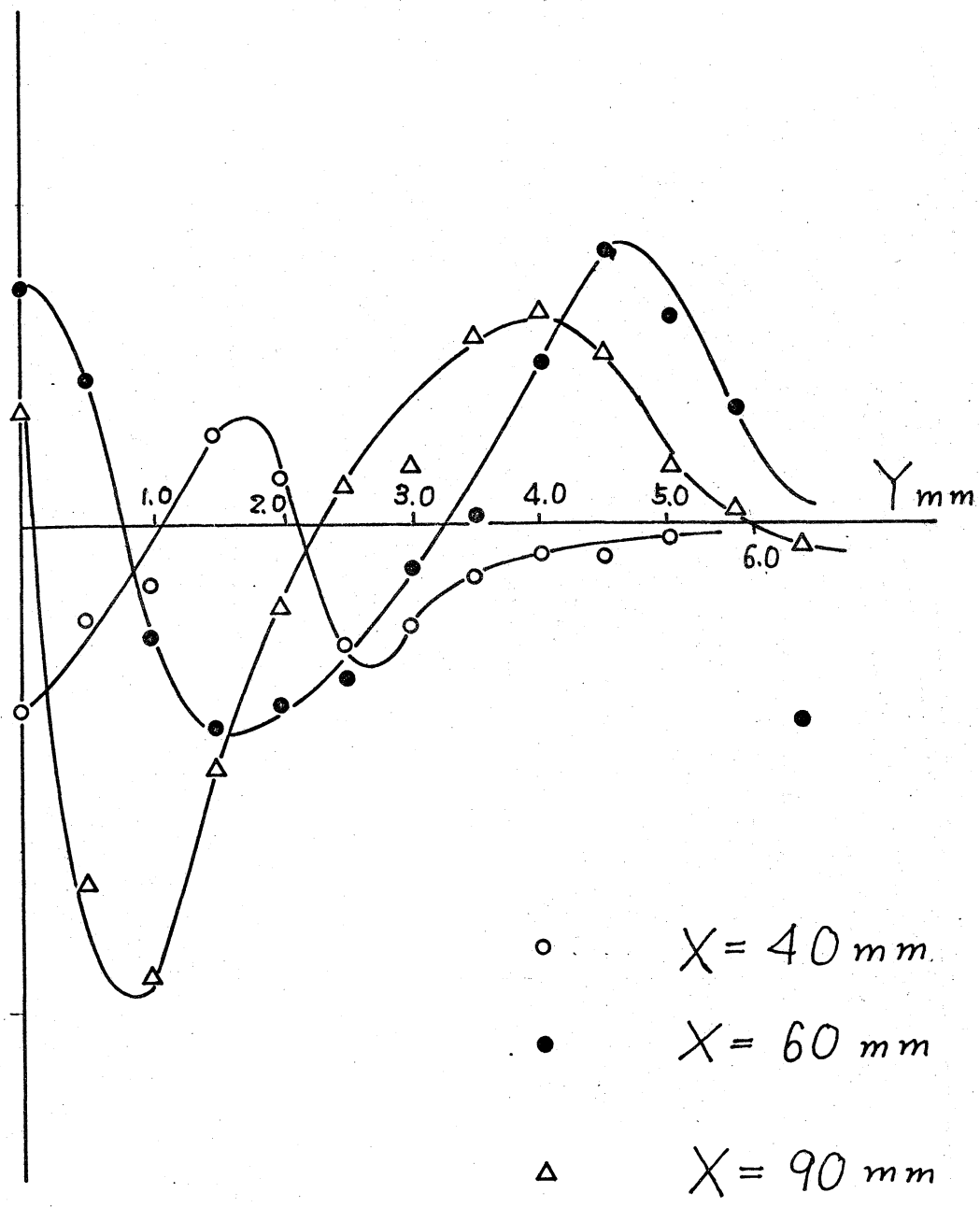


図7. 第2高調波による Reynolds stress の分布.

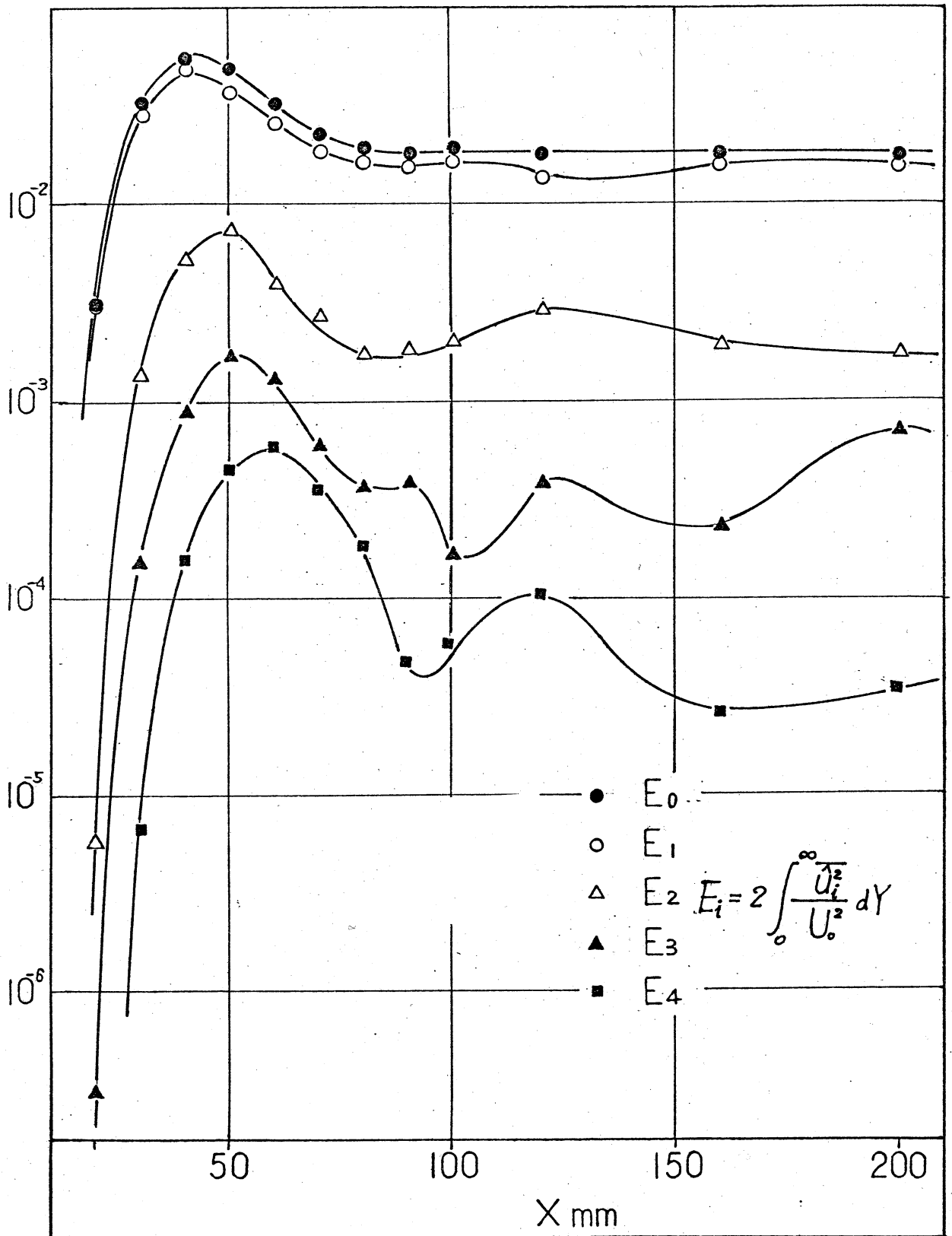


図 8. Integrated energy の流下方向の変化.