数理解析研究所講究録
第185巻 1973年 126-136

ブラウン運動と乱流中に浮遊する大きい粒子の運動

東大 工 桑原 真二

§1. まえがき

今日まで、乱流の構造に関する理論は、多くの研究者により、色々の立場から構成されてきた。 E. Hopf の理論は統計力学的立場に立つものであり、粒子系の Liouville 方程式を連続無限自由度の力学系に一般化したものである。乱流を統計力学的に考察する場合、各点 x の流速 $u(x)$ (又、そのフーリエ成分 $u(k)$) が偶然量と考えられ、したがって位相空間は $u(x)$ 又は $u(k)$ 関数空間となる。

統計力学的対象において、偶然性の要因は運動方程式中の偶然力と初期条件以外には考えられない。決定論的 Navier-Stokes 方程式にもとずく乱流を問題にする場合には、それ故、偶然性の要因は初期条件以外にはない。

一方、我々が乱流について観測できる量は限られたものである。ということは、全位相空間ではなしに、もっとせまい部分空間に着目していることになる。この事情は古典統計力学において Liouville 方程式ではなしに、Boltzmann

方程式や Fokker-Planck 方程式を論ずることに対応している。

この論文では乱流中に浮遊する粒子の運動から，乱流について如何なる情報がえられるかを論ずる。粒子の運動によって我々は乱流の情報の一部をとらえているから，位相空間のある部分空間に着目しているといえよう。

§2. レイノルズ方程式と渦粘性

流体の方程式は

$$C(x) \equiv \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{2.1}$$

$$N_\alpha(x) \equiv \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_\beta}(p_{\alpha\beta} - \rho v_\alpha v_\beta) = 0 \tag{2.2}$$

$$p_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} + \mu\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right) \tag{2.3}$$

と書かれる。 こゝで $v_\alpha(t, x)$ は流速，$p(t, x)$ は圧力，$p_{\alpha\beta}(t, x)$ は応力テンソル，ρ は密度である。 諸量を平均流（－つき）と乱流（～つき）に分解し

$$\left.\begin{array}{ll} v_\alpha = \bar{v}_\alpha + \tilde{v}_\alpha , & p = \bar{p} + \tilde{p} \\ \langle \tilde{v}_\alpha \rangle = 0 , & \langle \tilde{p} \rangle = 0 \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

とおく。 こゝで〈 〉は統計平均 ensemble mean をあらわす。

平均流についての方程式をつくると

$$\langle C(x)\rangle \equiv \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \tag{2.5}$$

$$\langle N_\alpha(x)\rangle \equiv \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(P_{\alpha\beta}-\rho\,\bar{v}_\alpha \bar{v}_\beta\right)=0 \tag{2.6}$$

$$P_{\alpha\beta}=\bar{p}_{\alpha\beta}+p^R_{\alpha\beta} \tag{2.7}$$

$$\bar{p}_{\alpha\beta}=-\bar{p}\,\delta_{\alpha\beta}+\mu\left(\frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta}\right) \tag{2.8}$$

$$p^R_{\alpha\beta}=-\rho\langle \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\beta\rangle \tag{2.9}$$

となる。 (2.6) はレイノルズ方程式、(2.9) はレイノルズ応力とよばれる。 (2.5) ～ (2.9) 方程式系は (2.9) に $\tilde{v}_\alpha$, $\tilde{v}_\beta$ がはいっているのでとじた形をしていないが

$$p^R_{\alpha\beta}=\mu_e\left(\frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta}\right) \tag{2.10}$$

とおき、μ_e がわかったものと考えると、(2.5) ～ (2.9) はとじたものとなる。 (2.10) の μ_e は渦粘性とよばれる。

この論文では、渦粘性が、他の平均量と如何に関係しているかを論ずる。

§3. ブラウン運動

ブラウン運動の理論は、次の仮定にもとずいている。

I. ブラウン粒子の大きさ（半径 a の球とする）は平均自由行程 λ にくらべて大きい；

$$a \gg \lambda \tag{3.1}$$

したがって、粒子の運動には分子粘性の効果がある。

II. ブラウン粒子の運動は熱運動と平衡状態にある。

III. ブラウン粒子同志の衝突は少く、その拡散は熱運動のゆらぎの効果にもとずく。

バックグラウンドの流体は止っているとし、ブラウン粒子系は連続体とみなす。まず仮定IIから

$$p_b = k_B n T \tag{3.2}$$

がえられる。p_b はブラウン粒子系の分圧であり、ブラウン粒子を通さない半透膜における滲透圧として観測される。nはブラウン粒子の数密度、Tは溶媒および粒子系の温度、k_Bはボルツマン定数である。

粒子数保存法則から、連続の方程式：

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}(n \mathbf{v}) = 0 \tag{3.3}$$

をうる。こゝで$\mathbf{v}$はブラウン粒子系の連続体としての流速である。更にブラウン粒子系の運動方程式を、仮定Iより

$$mn\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathrm{grad}\, p_b + mn\mathbf{K} - mn\gamma\mathbf{v} \tag{3.4}$$

とうる。こゝでmはブラウン粒子の質量、$\mathbf{K}$は外力（体積力）、γは粒子の易動度で、Stokesの抵抗法則が成立つ場合には

$$\gamma = 6\pi\mu a \tag{3.5}$$

となる。

さて、(3.4)はブラウン運動を平均化してえられるもので個々のブラウン粒子に対する方程式では偶然力の項があり、圧力項はない。平均化によって偶然力は圧力項に変形したわけである。平均化された運動においては、速い運動はなくなっているから、(3.4)では慣性項を粘性項にくらべて小さいとみなし、完全に無視することができる。このような省略を行った(3.4)と(3.2)、(3.3)からブラウン粒子の拡散の方程式：

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{k_B T}{m\gamma}\Delta n - \frac{1}{\gamma}\mathbb{K}\cdot \mathrm{grad}\, n \qquad (3.6)$$

を得る。これから拡散率Dは

$$D = \frac{k_B T}{m\gamma} \qquad (3.7)$$

であることがわかる。これがアインシュタインの関係式に外ならない。

§4. 乱流中に浮遊する大きい粒子の運動

乱れた管流を考えよう。管壁附近のうすい領域と管の中心領域の2つの領域に分けて考察する。管壁近くの領域では分子粘性応力が、中心領域ではレイノルズ応力が各々支配

的である。 前者では平均流速の急激に変化する境界層の厚さδが、後者では管の直径dが特徴的長さと考えられる。これらの長さに対して波数

$$k_\delta = 2\pi/\delta \qquad k_d = 2\pi/d \qquad (4.1)$$

を対応させる。

乱れた管流では、等方性も、一様性も一般に仮定しがたく、したがってエネルギー・スペクトルの概念も正確には成立たない。 しかし、中心領域では、一様性、等方性が大体成立っているとみなすことができよう。 等方性が十分に成立たない場合にも、エネルギー・スペクトルを

$$E(k)\,dk = \frac{1}{4\pi k^2}\iiint_{k \leq |\mathbf{k}| \leq k+dk} \langle u(\mathbf{k})^* u(\mathbf{k}) \rangle\, d\mathbf{k} \qquad (4.2)$$

と定義しておく。

ブラウン運動は熱動揺 thermal agitation と分子粘性による減衰にもとずくものであった。 乱流中に浮遊する粒子の運動も、ブラウン運動と非常によく似た対応関係がある。すなわち、このような粒子の運動は、乱流動揺 turbulent agitation と、渦粘性による減衰効果をうける。 ただし、このような条件にあてはまる粒子はある程度"大きい"粒子でなければならない。 というのは、乱流においては大きい運動（小さい波数）と小さい運動（大きい波数）とは力学的

平衡にないからである。

乱れた管流では、圧力勾配によって壁附近の領域で強い渦が発生し、その渦は偶然的に、あるいはもっと大きい ordered motion によって中心領域にはこばれる。近似的に一様性、等方性をもつ中心領域でのエネルギー・スペクトルは、k_δ附近にエネルギー供給があり、したがって極大をもつと予想される。k_δより小さい方は散逸の効果が小さく、力学的平衡にあると考えられる。又、kの大きい領域は、散逸効果がきつく、エネルギーが熱に変えられるから、供給されたエネルギーは殆どkの大きい方へ流れて行くものと考えられる。

$k < k_\delta$では、一種の力学的平衡にあると考えれば、乱流温度という概念が与えられる。一番小さい波数はk_dと考えられるから、波数空間にk_dを一辺とする立方格子をつくり、$|k| < k_\delta$では、各格子点に対応する波には統計的に、均等にエネルギーが分配されると考えられ、各自由度あたりの平均エネルギーをk_Bで割れば乱流温度が与えられる。更に

$$k_a = \pi / a \qquad (4.3)$$

を球の半径aに対応する波数とすれば

$$k_d \ll k_a \ll k_\delta \qquad (4.4)$$

の条件が成立てば、球の運動は乱流温度で平衡状態になって

いると考えることができる。

丁度分子粘性の場合に、分子がミクロな運動のやりとりのにないてであったように、渦粘性では、小さい渦が、大きい運動(平均流)に対してミクロな運動の運動量のにないてになっているということができる。　そして、小さい渦，大きい運動の境目は最大エネルギー・スペクトルに対応する波数と考えるのが適当であろう。　そこで今考えている乱流では k_δ となる。したがって $k_a < k_\delta$ ならば、この球の運動は渦粘性の効果をうけるであろう。

上のような考察から、ブラウン運動の基本的仮定 I 〜 III は次のように修正して、ブラウン運動の理論を乱流中に浮遊する粒子の運動に適用することができる。

I. 粒子の半径 a に対応する波数 k_a はエネルギー・スペクトルの極大値に対応する波数 k_m にくらべて小さい：

$$k_a \ll k_m \ (\equiv k_\delta) \qquad (4.5)$$

したがって、粒子の運動は渦粘性の効果をうける。

II. $k < k_m (= k_\delta)$ の k の範囲で乱流は力学的平衡にあり、$k_d \ll k_a \ll k_m$ に対応する粒子の運動は又その乱流と力学的平衡にある。

III. 粒子同志の衝突は少く、その拡散は乱流のゆらぎの効果にもとづく。

上の仮定にもとづき、ブラウン運動の場合と全く同じ議論によって、乱流拡散率 D_t, 渦粘性率 μ_t、乱流温度 T_t の間にアインシュタインの関係式が成立つ。仮定Ⅲにより粒子の運動エネルギー $\frac{1}{2}m\langle a^2\rangle$ (aは粒子速度)と乱流温度の間に

$$\frac{1}{2}m\langle a^2\rangle = \frac{3}{2}k_B T_t \tag{4.6}$$

がなり立つ。したがってアインシュタインの関係式は

$$D_t = \frac{\langle a^2\rangle}{18\pi\mu_t a} \tag{4.7}$$

となる。

乱流拡散率は1個の粒子の運動から

$$\langle x^2\rangle = 2D_t t \tag{4.8}$$

によってもとまる。すなわち, $t=0$ に原点にあった粒子が t 後において移動した1次元距離 x の2乗平均と t の関係をプロットすればその比例係数から D_t がもとまる。粒子の運動から D_t と $\langle a^2\rangle$ を観測し、流体の平均速度勾配とずり応力の測定から、μ_t を知れば、(4.7) をたしかめることができる。

乱れた管流において、中心領域Ⅰでは μ_e が、境界領域Ⅱでは μ が支配的であり、境界 $b=a-\delta$ で、流速と摩擦応力が連続という境界条件によって、流体の方程式をとくと、Ⅰ，Ⅱ各領域の流速 u_I, u_{II} は

$$u_I = \frac{C}{4}\left(\frac{a^2}{\mu} + \frac{b^2}{\mu^*} - \frac{r^2}{\mu_e}\right) \qquad 0 \le r \le b \equiv a\left[\frac{\mu^*}{3}\left(\frac{Q}{8\pi a^4 C} - \frac{1}{\mu}\right)\right]^{1/4}$$

$$\left.\begin{aligned} u_{II} &= \frac{C}{4\mu}\left(a^2 - r^2\right) \\ \frac{1}{\mu^*} &= \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_e} \end{aligned}\right\} \quad (4.9)$$

となる。こゝで、Qは流量、Cは平均圧力勾配である。もしも、乱流が非常に強く（レイノルズ数大）、境界層の厚さが管径にくらべて非常にうすければ（4.9）の $b \doteqdot a$ とおけば

$$\frac{1}{\mu_e} \doteqdot \frac{4}{3\mu} - \frac{Q}{8\pi a^4 C} \qquad (4.10)$$

となり、圧力勾配Cと流量Qから、渦粘性がわかる。

結論として、乱流中に浮遊する粒子の半径aが

$$\frac{2\pi}{k_m} \ll a \ll d$$

の条件を満足すれば、アインシュタインの関係式：

$$D_t = \frac{\langle a^2 \rangle}{8\pi \mu_t a}$$

が成立つ。こゝで k_m は乱流のエネルギー・スペクトル最大の波数、d は乱流領域の大きさ、$\langle a^2 \rangle$ は粒子の速度の2乗平均、D_t, μ_t は乱流拡散率、渦粘性率である。

参考文献：

1) E. Hopf : J. Rational Mech. and Anal. 1, 87 (1952).

2) A. Einstein : Ann. der Phys. 17, 549 (1905).