

一般化されたフィッシャーの情報量と漸近理論

釜江哲良 (大阪大・理)

§1. フィッシャーの情報量の一般化

$X$ : 距離空間

$C(X)$ :  $X$ 上の実数値有界連続関数空間

$\mathcal{M}$ : 実数空間上の  $\sigma$  を含む  $\sigma$ -代数

$(P_\theta; \theta \in \Theta)$ :  $X$ 上の確率ボレル測度の系

$P \equiv P_\theta$

仮定  $X$ 上の全有界な (signed) ボレル測度  $Q$  が存在し

$$w\text{-}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_h - P}{h} = Q$$

(i.e.  $\forall \varphi \in C(X)$  に対して  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int \varphi dP_h - \int \varphi dP}{h} = \int \varphi dQ$ )  
 とする。

$Q = Q^c + Q^s$  且  $Q^s = Q^{s+} - Q^{s-}$  とする。但し、 $Q^c$  は  $P$  に因して絶対連続。 $Q^s$  は  $P$  と互いに singular。また、 $Q^{s+}$  及び  $Q^{s-}$  は互いに singular な非負測度。  
 $\|Q^{s\pm}\| \equiv Q^{s\pm}(X)$  (符号同順) と書く。 $\varphi \in C(X)$  且  $\varphi \geq 0$

とすれば  $\varphi$  に対して、 $J(\varphi) \equiv \frac{(\int \varphi dQ)^2}{\int \varphi dP}$  と定義する。

但し,  $\int \varphi dP = 0$  のとき  $J(\varphi) = 0$  とする。以上の非自連続関数の有限系  $\{\varphi_i; i=1, 2, \dots, n\}$  は  $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1$  を満たすときその有限連続分割と呼ぶ。

$$I \equiv \sup_{\{\varphi_i\}: \text{有限連続分割}} \sum_i J(\varphi_i)$$

$$I^c \equiv \int \left| \frac{dQ^c}{dP} \right|^2 dP$$

と定義する。

定理 1. (1)  $Q^S = 0$  のとき,  $I = I^c$

(2)  $Q^S \neq 0$  のとき,  $I = \infty$

(3)  $I$  はフィッシャーの情報量の拡張にたがってゐる。

定理 2. (クラメル-ラオの不等式の拡張)

$$\inf \left\{ V_P[\hat{\theta}], \hat{\theta} \in C(\theta), E_P[\hat{\theta}] = \theta, E_Q[\hat{\theta}] = 1 \right\} = \frac{1}{I}$$

但し,  $V$  は分散,  $E$  は平均を意味する。また,  $\frac{1}{\infty} = 0$  と考える。

よ2.  $Q^S \neq 0$  の場合の考察

$Q^S \neq 0$  のとき,  $I = \infty$  とわかる。このように場合, 情報の量を表わす目安として

$$I^S \equiv \|Q^{S+}\|^2 + \|Q^{S-}\|^2$$

を考えるのが妥当のように思える。実際、

### 定理 3

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \sum_i J(\varphi_i), \begin{array}{l} \{\varphi_i\} \text{ は有限連続分割で} \\ \int \varphi_i dP > \varepsilon \quad (\forall i) \text{ とする} \end{array} \right\} \cdot \varepsilon = I^S$$

が成立する。