数理解析研究所講究録
第201巻 1974年 197-202

6月8日

佐藤さんの研究集会の講義

"Variation of cohomology in an algebraic family".

by Robin Hartshorne

§0 Introduction

次の一般の問題を考えます。

$\{X_t\}_{t\in T}$, T open $\subseteq \mathbb{C}$ を complex analytic space の analytic family として、
$t\in T$ に対して、$H^i(X_t,\mathbb{C})$ を考えて、どの様に $H^i(X_t,\mathbb{C})$ は t に depend するか という問題を考えます。

① 例えば、f が smooth, proper のとき、すなわち、$\forall t\in T$, X_t compact complex manifold, X manifold, f proper. で、family $f: X\to T$ は differentiable family として locally trivial なことすぐ分かります。だから、$|t-t'|<\epsilon$, $\exists$ isomorphism $X_t \cong X_{t'}$, differentiable manifold として、しかも、$H^i(X_t,\mathbb{C})$ は X_t の topological space だけできまるから、

$$H^i(X_t,\mathbb{C}) \cong H^i(X_{t'},\mathbb{C})$$ なります。

$$\begin{array}{c} X = \text{total space} \\ \downarrow f \\ T \end{array}$$

$f^{-1}(t) = X_t$.

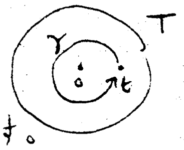
Thm: $f: X\to T$ smooth, proper $\Rightarrow$ (T connected)
function $t \longmapsto \dim H^i(X_t,\mathbb{C})$ is constant.

② もっと面白い場合は $T=$ disc $\{|z|<1\}$ として、$f: X\to T$ proper morphism, $f: X-X_0 \to T-\{0\}$ smooth, X_0 singular points を持つ場合です。

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \subseteq & X \\ | & & \downarrow f \\ 0 & \in & T \end{array}$$

$t\in T-\{0\}$ なら、$H^i(X_t,\mathbb{C})$ locally constant だから、path γ に対して、automorphism

$$\varphi: H^i(X_t,\mathbb{C}) \longrightarrow H^i(X_t,\mathbb{C})$$



があります。それを "monodromy transformation と呼びます。
それから T contractible ですから、X_0 は X の retraction です。
したがって、$H^i(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} H^i(X_0,\mathbb{C})$ isomorphism です。

なお, $X_t \longrightarrow X$ の injection に対して, $H^i(X) \to H^i(X_t)$ の mapping がありますから, 自然な mapping

$$\alpha^i : H^i(X_0, \mathbb{C}) \longrightarrow H^i(X_t, \mathbb{C})$$

を得ります。Image α^i は, $H^i(X_t, \mathbb{C})$ の invariant cocycles (ξ invariant $\Leftrightarrow \varphi\xi = \xi$) に含まれていますから,

$$\boxed{\alpha^i : H^i(X_0, \mathbb{C}) \longrightarrow H^i(X_t, \mathbb{C})^{\varphi} = \text{invariant cocycles.}}$$

という mapping があります.

そのように, X_0 と X_t の cohomology との関係は研究されます。

③ Differential equations との関係もあります。$T - \{0\}$ 上に, sheaf $F^i = R^i f_*(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_T$ を考えて, これは locally free coherent sheaf で, 自然な (integrable) connection ∇ を持っています。

(Integrable) connection とは, $F \xrightarrow{\nabla} F \otimes \Omega^1$ という mapping で,

i) $\nabla(sf) = s\nabla f + f \otimes ds$

ii) $F \xrightarrow{\nabla} F \otimes \Omega^1 \xrightarrow{\nabla'} F \otimes \Omega^2$ で, $\nabla' \circ \nabla = 0$. (T = dim 1 から, いつもそうです).

Local に, $F \cong \mathcal{O}_T^r$, ∇ は $\mathcal{O}_T^r \longrightarrow (\Omega_T^1)^r$ ですから,

$$\nabla = d + \omega, \quad \omega = (\omega_{ij}). \quad \omega_{ij} \in \Omega^1 . = g_{ij}\,dz.$$

だから, differential equations

$$df_i + \sum_{j=1}^{r} g_{ij} f_j \, dz = 0 \qquad i = 1, \dots, r$$

を考えます. これを Picard-Fuchs equation と呼びます。
そうしたら, 前の monodromy は, この DE の monodromy です。

今日は、このことを algebraic geometry の点で研究したいんです。
目的は、algebraic family $f: X \to T$ に対して、

1) $H^i(X_t, \mathbb{C})$ を代数的で定義する
2) monodromy と mapping α^i を代数的定義する、
3) f についての hypotheses を一般化する

(f smooth proper の代りに、f は morphism of schemes とします。だから、X_t は singularities を持ってもいいですし、X_t non-proper でもいいです。)

4) monodromy は trivial かつ α^i は isom なるような条件を述べる。

§1 Algebraic の場合の cohomology の定義.

k . 体 . char. 0.

Y . k-上の scheme (finite type) non-proper singular でもよい。

$Y \underset{\text{closed}}{\hookrightarrow} X$. X smooth$/k$.

$$\Omega^{\cdot}_X = \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X \to \cdots \to \Omega^n_X .$$ differential forms の sheaf の complex.

$\hat{\Omega}^{\cdot}_X$: $\Omega^{\cdot}_X$ の Y に沿っての formal completion.

(X の sheaf F に対して、formal completion $\hat{F} = \varprojlim_\nu F/I_Y^\nu F$ で定義します。)

そうしたら、

$$H^i_{DR}(Y) = H^i(\hat{X}, \hat{\Omega}^{\cdot}_X)$$ という定義します.

Y の algebraic De Rham cohomology を呼びます. (X の取り方によりません。)

Thm 1. $H^i_{DR}(Y)$ fin. dim. k-vectorspace $\forall i$.

Thm 2 $k = \mathbb{C}$ なら、

$$H^i_{DR}(Y) \cong H^i(Y^h, \mathbb{C}) .$$

同様に、$f: Y \longrightarrow T$ family として
$Y \hookrightarrow X$, T-上の smooth scheme で、

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "smooth"] \\ Y \arrow[ur, hook] \arrow[d] & \\ T & \end{tikzcd}$$

$\Omega^{\cdot}_{X/T}$ relative differentials の sheaf の complex,
$\hat{\Omega}^{\cdot}_{X/T}$, Y に沿っての formal completion,

$$R^i_{DR} f_*(Y) = R^i f_*(\hat{X}, \hat{\Omega}^{\cdot}_{X/T})$$ という定義します。

<u>sheaf of relative De Rham cohomology</u> を呼びます。

absolute の場合に、$H^i(Y)$ fin dim. ですが、relative の場合に coherent 必ずしもありません。quasi-coherent さえありません。

けれども、

<u>Thm 3</u>. $\exists$ (Zariski) open dense subset $U \subseteq T$ such that $R^i_{DR} f_*(Y)$ is coherent and locally free on U, for all i.

<u>Thm 4</u>. $k = \mathbb{C}$ なら、$\exists$ open dense subset $U \subseteq T$ such that

$$R^i_{DR} f_*(Y)^h \cong R^i f^h_*(Y^h, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}^h_T .$$

§2 <u>Monodromy + relation with cohomology of fibre</u>

今から、T smooth, dim 1 とします。

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[d, dash] \\ k \end{tikzcd}$$

<u>Thm 5</u>: $R^i_{DR} f_*(Y)$ は canonical integrable connection ∇ を持っています。

Katz と小田で construct されています、f smooth の場合で、一般の場合で同じ方法を使います。

analytic の場合 に coherent sheaf の int. connection は いつも locally trivial ですが、algebraic の場合に、Zariski topology 弱いですから、そんなことは成り立ちません。

だから、complete local ring を使って、強い localization をします。

そうしたら、

$$R^i f_*(Y)_{\tau'} = H^i_{DR}(Y'_{\tau'})/K$$

$$\begin{array}{ccc} Y' & & Y \\ \downarrow & & \downarrow f \\ T' & \longrightarrow & T \end{array}$$

$t_0,\ \tau' \in T'$ (τ': generic point), $T' = \operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_{t,T} = \operatorname{Spec} k[[t]] \subseteq K = k((t))$

τ' は generic point で、$H^i(Y'_{\tau'})$ generic fibre の cohomology を得ります。$K = k((t))$ 上の vector space です。

K上の vector space $H^i(Y'_{\tau'})$ とその connection ∇ で、t の近傍の <u>monodromy</u> を表わします。

$H^i(Y'_{\tau'})^{\nabla}$ は horizontal sections として、k-上の finite dim vector space です。"<u>invariant cocycles</u>".

<u>Thm 6</u>: $f: Y \to T$ proper morphism で、$t_0 \in T$. $T' = \operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_{t_0,T}$. τ' generic point. $\Rightarrow$ 自然な mapping

(α^i を定義するのに f proper いります。)

$$\alpha^i : H^i(Y_{t_0}) \longrightarrow H^i(Y'_{\tau'})^{\nabla}$$

があります。

しかも、integer r に対して、$R^i f'(Y')$ は coherent $\forall i \le r$ と仮定すると、

$\Rightarrow \forall i \le r$, 1) $\nabla : H^i(Y'_{\tau'})$ は trivial

2) α^i isomorphism.

<u>Cor 7</u>: $f: X \to T$ morphism of schemes. $k = \mathbb{C}$. $\exists$ U open dense Zariski subset s.t. $\forall t \in T$,

$$t \longmapsto \dim H^i(X_t^h, \mathbb{C}) \quad \text{constant}.$$

Problems ① "Griffiths' Conjecture"

α^i surjective でしょうか。

(Deligne によって 証明あるそうですが，複雑ですし，analytic と思います．だから，簡単な代数的な証明いります。)

② semi-continuity.

H^0 について， $\dim H^0(X_0) \leq \dim H^0(X_t)$ いつもそうです，"connectedness principle" ゆえで．

H^i について， $i>0$，ある semi-continuity 成り立つが。

(X は適当な条件をみたすとき)

Reference: "Algebraic De Rham Cohomology"
to appear, manuscripta math.