数理解析研究所講究録
第 203 巻 1974 年 2-13

二面体群の分類空間の複素コボルディズム群

九大 教養　鎌田正良

§1. 序

二面体群 D_p すなわち，位数 p の元と位数 2 の元 g 及び t で生成される群で，$t^{-1}gt = g^{-1}$ なる関係をもつ群が弱複素多様体にその複素構造を保存するように作用する自由作用のコボルディズ群の構造は [5] において，p が奇素数について決定された。この際 D_p-作用が次によって定義される球面の積 $S^{2l+1}\times S^m$ が重要な役割を果した。

(1.1)　　$g^i t^j(z, x) = (\rho^i c^j(z), (-1)^j x)$

但し，$\rho = \exp 2\pi\sqrt{-1}/p$，$c(z)$ は z の共役点。この軌道空間を $D_p(l, m) = S^{2l+1}\times S^m/D_p$ で表わすことにする。Quillen [10] のコボルディズム群の幾何学的解釈に注意し，複素コボルディズム群 $U^*(D_p(l, m))$ の Atiyah-Hirzebruch 型のスペクトル列を調べることによって，次の定理が得られる。

定理 1.1.　pを奇素数とすると，次の同型が存在する。

$$\tilde{U}^{2m}(D_p(2k+1,4k+3)) \cong U^{2m-8k-6} \oplus \tilde{U}^{2m}(L^{2k+1}(p))^{Z_2} \oplus \tilde{U}^{2m}(RP^{4k+3})$$

但し，$L^s(p)$ は標準的な$(2s+1)$-次元レンズ空間を示し，RP^t は t-次元実射影空間を示す。更に $\tilde{U}^{2m}(L^{2k+1}(p))^{Z_2}$ は $\tilde{U}^{2m}(L^{2k+1}(p))$に定義される$Z_2$ 作用の不変部分群を示す。このZ_2-作用については§2で定義される。

D_p の分類空間 BD_p は $\{D_p(2k+1,4k+3)\}_k$ の極限空間として表わされる。$BD_p = \varinjlim D_p(2k+1,4k+3)$．従って，Milnor [7] の short exact 列を用いることによって，次を得る。

定理 1.2.　pを奇素数とすると，次の同型が存在する。

$$\tilde{U}^{2m+1}(BD_p) \cong 0$$

$$\tilde{U}^{2m}(BD_p) \cong \tilde{U}^{2m}(BZ_p)^{Z_2} \oplus \tilde{U}^{2m}(BZ_2)$$

但し，よく知られているように $U^*(BZ_p) \cong U^*[[X]]/[p]_F(X)$, [6] であるが，$U^*(BZ_p)$への$Z_2$-作用は$Z_2$ の生成元tに対して，

$$\{f(X)\}^t = f([-1]_F(X))$$

で与えられる。

定理 1.1 と Conner-Floyd [1] の同型 $\tilde{K}(X) \cong \tilde{U}^{ev}(X) \otimes_{U^*} Z$

を用いることによって，次の結果を得る。

定理 1.3.　pを奇素数とすると，次の同型が存在する。

$$\tilde{K}(D_p(2k+1,4k+3)) \cong \mathbb{Z} \oplus \tilde{K}(L^{2k+1}(p))^{\mathbb{Z}_2} \oplus \tilde{K}(RP^{4k+3})$$

この結果と同様の形の同型が$\tilde{K}(D_p(2l+1,2m+1))$についても成り立つことが［2］で示された．さらに一般の場合，$\tilde{K}(D_p(l,m))$については，今岡-菅原［3］によって決定されている．

以上の詳細については［4］を参照されたい。Meta-Cyclic 群の場合のボルディズム群，コボルディズム群についての考察が最近，柴田氏によって行われて，［8］，［9］において，［5］及びこの報告の内容を含む結果が得られていることを附記する．

§2.　半直積群が作用する空間のコボルディズム群

Quillen［10］によって，複素コボルディズム群の幾何学的解釈がされているが，それと殆んど同様にして，群Gが作用するG-可微分多様体Xに対する同変コボルディズム群$U_G^*(X)$を定義することができる。ZをG-可微分多様体とする。写像$f: Z \longrightarrow X$をG-同変写像とする。G-写像f

の点 $z\in Z$ における次元は $(\dim f)_z=\dim T_z-\dim T_{f(z)}$ と定義され，すべての $z\in Z$ に対して $(\dim f)_z=a$ のとき，f の次元は a であると定義する。G-写像 f の次元が偶数のとき f が同変複素向き付け可能であるとは，次の性質をもつ分解が存在することである．

$$Z\xrightarrow{i}E\xrightarrow{p}X$$

(0)　$p\circ i=f$

(1)　$p:E\to X$ は可微分同変G-複素バンドル

(2)　i は同変埋め込み写像

(3)　i の法バンドルは E に与えられた作用と共変的な複素構造をもつ。

G-写像 f の次元が奇数次元のときは，G-写像 $f':Z\to X\times R^1$ $(f'(z)=(f(z),0))$ に対して，上と同様の定義に従って，同変複素向き付けを定義する．同一次元のG-写像とその分解の組の集合 $\{(f,\ Z\to E\to X)\}$ に [10] と全く同様に cobordant 同値関係～ を定義することができる。

ここで，

$$U_G^m(X)=\{(f,\ Z\to E\to X)\ ;\ \dim f=-m\}/\sim$$

とおく。その同値類を $[Z\to E\to X]_G$ と書く。G が単位元のみからなる群ならば $U_{\{e\}}^m(X)\simeq U^m(X)$ であり，X が自由G-作用をもつ可微分多様体ならば，$[Z\to E\to X]_G$ に

対して $[Z/G \to E/G \to X/G]$ なる商空間の写像で定義される通常のコボルディズム類を対応させることによって，次の同型を得る。

$$U^m_G(X) \cong U^m(X/G).$$

以下Gを有限群とし，Gは群Hの群Γによる半直積群とする。$G=H\cdot\Gamma$。XをコンパクトG-可微分多様体とし，そのG-作用をHに制限すると，H-可微分多様体としては，自由作用をもつものと仮定する。Yを自由Γ-可微分多様体とする。それらの直積$X\times Y$に$G=H\cdot\Gamma$-作用を

$$h\gamma\,(x,y)=(h\gamma x,\gamma y) \qquad h\in H,\ \gamma\in\Gamma$$

と定義すると，$X\times Y$は自由G-可微分多様体である。同変写像

$$i : X \longrightarrow X\times Y \qquad i(x)=(x,y_0)$$

によって，準同型写像 $i^* : U^m(X\times Y/G) \longrightarrow U^m(X/H)$ が誘導される。

準同型写像 $i_* : U^m(X/H) \longrightarrow U^m(X\times Y/G)$ を以下で定義する。すなわち，$i_* : U^m_H(X) \longrightarrow U^m_G(X\times Y)$ を定義する。Xがコンパクトであることに注意すると，$U^m_H(X)$ のコボルディズム類は $[Z \xrightarrow{i} X\times\mathbb{C}^n \xrightarrow{p} X]_H$ で表わされる。但し，$X\times\mathbb{C}^n$へのG-作用は $g(x,z)=(gx,z)$ で与え，$p(x,z)=x$とする。VをΓの正則表現空間 $e:\Gamma\longrightarrow V$ を埋め込

みΓ−同変写像とする。G−可微分多様体 $G\times_H Z\times Y$，$X\times \mathbb{C}^n\times Y\times V$を下で定義される$G$−作用をもつとする。

$$h\gamma(g\times_H z,\ y)=(h\gamma g\times_H z,\ \gamma y)$$
$$h\gamma(x,z,y,v)=(h\gamma x,\ z,\ \gamma y,\ \gamma v)$$

このとき，次のG−同変複素向き付けを与える分解を得る。

$$G\times_H Z\times Y\xrightarrow{\tilde{i}}X\times\mathbb{C}^n\times Y\times V\xrightarrow{\tilde{p}}X\times Y$$

但し，$\tilde{i}(h\gamma\times_H z,\ y)=(h\gamma i(z),\ y,\ e(\gamma))$，$\tilde{p}(x,z,y,v)=(x,y)$。ここで

$$i_*[Z\xrightarrow{i}X\times\mathbb{C}^n\xrightarrow{p}X]_H=[G\times_H Z\times Y\xrightarrow{\tilde{i}}X\times\mathbb{C}^n\times Y\times V\xrightarrow{\tilde{p}}X\times Y]_G$$

と定義する。

$U_H^n(X)$ へのΓ−作用を次のように定義する。$U_H^n(X)$ の元$[Z\xrightarrow{i}X\times\mathbb{C}^n\xrightarrow{p}X]_H$に対して，次の分解を考える。

$$(Z)^\gamma\xrightarrow{i^\gamma}X\times\mathbb{C}^n\xrightarrow{p}X$$

但し，$(Z)^\gamma$ はZのコピーであって，そのH−作用は，

$$h\underset{\gamma}{\cdot}z=h^{\gamma^{-1}}z$$

で与える。また $i^\gamma(z)=\gamma i(z)$ とする。これは，H−同変複素向き付けを与えることがわかる。そこでΓ−作用を次のように定義する。

$$[Z\xrightarrow{i}X\times\mathbb{C}^n\xrightarrow{p}X]_H^\gamma=[(Z)^\gamma\xrightarrow{i^\gamma}X\times\mathbb{C}^n\xrightarrow{p}X]_H$$

このとき，次の定理を得る。

定理2.1. xを$U^n(X/H)$の元とすると，

$$i^* i_*(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} x^\gamma$$

§3. $\tilde{U}^{2m}(D_p(2k+1, 4k+3))$の構造

(1.1)で定義されたD_p−多様体$S^{2l+1} \times S^m$の軌道空間$D_p(l, m)$は§2で扱われた多様体の1つの例である。S^{2l+1}を$g \cdot z = \rho z$で与えられるZ_p−多様体，S^mを$t \cdot x = (-1)x$で与えられるZ_2−多様体とすると，次の同変写像が得られる。

$$p : S^{2l+1} \times S^m \longrightarrow S^m \qquad p(z, x) = x$$

$$j : S^m \longrightarrow S^{2l+1} \times S^m \qquad j(x) = ((1, 0, \cdots, 0), x)$$

p，jから導かれる準同型写像$p^* : U^*(S^m/Z_2) \longrightarrow U^*(D_p(l, m))$及び$j^* : U^*(D_p(l, m)) \longrightarrow U^*(S^m/Z_2)$は

(3.1) $$j^* p^* = 1$$

を満たす。

命題3.1. pを奇素数とする。$\Phi : \tilde{U}^{2n}(S^{2l+1}/Z_p)^{Z_2} \oplus \tilde{U}^{2n}(S^m/Z_2) \rightarrow \tilde{U}^{2n}(D_p(l, m))$，$\Phi(x, y) = i_*(x) + p^*(y)$は単射である。

証明 $\tilde{U}^{2n}(S^{2l+1}/Z_p)$は$p$群であり，$\tilde{U}^{2n}(S^m/Z_2)$が2群であることに注意すると，(3.1)及び定理2.1より証明される。

[5] で考察されたように, $D_p(l,m)$ は $L^l(p)\times S^m$ の $([z], x)\sim([c(z)], -x)$ なる同値関係による商空間 $L^l(p)\times S^m/\sim$ と同相である。$L^l(p)$, S^m の各々の標準的な胞体を C_i, D_j と表わすと, $D_p(l,m)$ の胞体分割は $(C_i, D_j)=(C_i\times D_j)$ で与えられる。(C_i, D_j) の双対コチェインを (c^i, d^j) と表わすと, 整係数コホモロジー群の構造が次の様に得られる。

命題3.2. $\tilde{H}^*(D_p(l,m);Z)$ は次の元によって加群として生成される。但し, p は奇素数とする。

(i) l: 奇数, m: 奇数の場合

位数 p の元; (c^{4i}, d^m), (c^{4i}, d^0)

位数2の元; (c^{2k+1}, d^{2j}), (c^0, d^{2j})

自由の元 ; (c^{2l+1}, d^0), (c^0, d^m), (c^{2l+1}, d^m)

(ii) l; 偶数, m; 偶数の場合

位数 p の元; (c^{4i-2}, d^m), (c^{4i}, d^0)

位数2の元; (c^{2k+1}, d^{2j+1}), (c^0, d^{2j})

自由の元; (c^{2l+1}, d^m)

球面 S^{2s+1} に Z_p を $g\cdot z=\rho z$ で作用させる場合,

$$-_{k-m} = [S^{4m+3} \subset S^{4k+3} \xrightarrow{id} S^{4k+3}]_{Z_p}$$

なる $\tilde{J}^{4(k-m)}_{Z_p}(S^{4k+3})$ の元を得る。球面 S^{2t+1} に Z_2 を $t\cdot x$

$=(-1)x$ で作用させる場合

$$R_{2k+1-m}=[S^{2m+1}\subset S^{4k+3}\xrightarrow{id}S^{4k+3}]_{Z_2}$$

なる $\tilde{U}^{2(2k+1-m)}_{Z_2}(S^{4k+3})$ の元を得る。Thom 準同型写像を $\mu: U^*(X)\longrightarrow H^*(X)$ で表わすと，次の補題を得る。

補題 3.3. $\mu i_*(L_{k-m}+L^t_{k-m})=a(c^{4(k-m)},d^0)$, $a\not\equiv 0 \bmod p$
$\mu p^*(R_{2k+1-m})=(c^0,d^{4k+2-2m})$.

定理 1.1 の証明

補題 3.3 より (c^{4i},d^0), (c^0,d^{2j}) は $\tilde{U}^*(D_p(2k+1,4k+3))$ の Atiyah - Hirzebruch 型のスペクトル系列において，parmanent cycle であることを知る。更に，命題 3.2 より，次元の関係及びスペクトル系列の differential の像が有限群であることから $\tilde{U}^*(D_p(2k+1,4k+3))$ のスペクトル系列は自明であることが解る。従って $\tilde{U}^{ev}(D_p(2k+1,4k+3))$ の torsion 部分は $i_*(L_{k-m}+L^t_{k-m})$ 及び $p^*(R_{2k+1-m})$ で生成される。故に，命題 3.1 より Φ は $\tilde{U}^{ev}(D_p(2k+1,4k+3))$ の torsion 部分への同型写像を与える。次に，$D_p(2k+1,4k+3)$ の $8k+5$ skeleton を Y_k とおくと，次の short exact 列を得る。

$$0\to\tilde{U}^{2m}(D_p(2k+1,4k+3)/Y_k)\to\tilde{U}^{2m}(D_p(2k+1,4k+3))\to\tilde{U}^{2m}(Y_k)\to 0$$

特に，$\tilde{U}^{2n}(D_p(2k+1, 4k+3)/Y_k) \cong U^{2m-8k-6}$ に注意して，定理1.1を得る.

§4.　定理1.2の証明.

定理1.1 はその証明中でも明らかなように，$\tilde{U}^{even}(S^{4k+3}/Z_p)^{Z_2}$ が $L_{k-m}+L^t_{k-m}$ で生成されることを意味している。従って，包含写像 $S^{4k-1} \subset S^{4k+3}$ から誘導される準同型写像を伴う inverse system $\{\tilde{U}^{2n}(S^{4k+3}/Z_p)^{Z_2}\}_k$ の準同型写像は全射である. inverse system $\{\tilde{U}^{2n}(S^{4k+3}/Z_2)\}_k$ の準同型写像が全射であることは明らかである。自然な包含写像から誘導される写像 $j_k : D_p(2k-1, 4k-1)/Y_{k-1} \longrightarrow D_p(2k+1, 4k+3)/Y_k$ は 0-準同型写像 $j_k^* : \tilde{U}^{2n}(D_p(2k+1, 4k+3)/Y_k) \longrightarrow \tilde{U}^{2n}(D_p(2k-1, 4k-1)/Y_{k-1})$ を導く。従って定理1.1より inverse system $\{\tilde{U}^{2n}(D_p(2k+1, 4k+3))\}_k$ は Mittag-Leffler の条件をみたす。

次の合成写像を考える：

$i_k : D_p(2k-1, 4k-1) \subset \tilde{Y}_k \subset D_p(2k, 4k+2) \subset D_p(2k+1, 4k+3)$

但し，$\tilde{Y}_k$ は $D_p(2k, 4k+2)$ の $(8k+2)$-skeleton とする。命題3.2の(ii) より $\tilde{H}^{odd}(\tilde{Y}_k) \cong 0$ 即ち，$\tilde{U}^{odd}(\tilde{Y}_k) \cong 0$ を得る. 従って

$$i_k^* : \tilde{U}^{2m+1}(D_p(2k+1, 4k+3)) \longrightarrow \tilde{U}^{2m+1}(D_p(2k-1, 4k-1))$$

は0-準同型写像である。故に，inverse system $\{\tilde{U}^{2m+1}(D_p(2k+1,4k+3)\}$ は Mittag-Leffler の条件をみたす。

Milnor の short exact 列［7］

$$0 \to \varprojlim{}^1 \tilde{U}^{*-1}(D_p(2k+1,4k+3)) \to \tilde{U}^*(BD_p) \to \varprojlim \tilde{U}^*(D_p(2k+1,4k+3)) \to 0$$

より，

$$\tilde{U}^{2m+1}(BD_p) \cong 0$$

$$\tilde{U}^{2m}(BD_p) = \{\varprojlim \tilde{U}^{2m}(S^{4k+3}/Z_p)\}^{Z_2} \oplus \varprojlim \tilde{U}^{2m}(S^{4k+3}/Z_2)$$

を得る。

一方，$L_2 \in \tilde{U}^2(S^{4k+3}/Z_p)$ は $c_1(\xi_{2k+1})$，ξ_{2k+1} は $L^{2k+1}(p)$ 上の canonical line bundle，に対応し，L_2^t は $c_1(\bar{\xi}_{2k+1})$ に対応する。$\varprojlim \tilde{U}^{2m}(S^{4k+3}/Z_p) \cong \tilde{U}^{2m}(BZ_p)$，$\varprojlim \tilde{U}^{2m}(S^{4k+3}/Z_2) \cong \tilde{U}^{2m}(BZ_2)$ であることに注意して，定理1.2 を得る。

参考文献

［1］ P. E. Conner and E. E. Floyd: The Relation of Cobordism to K-theories, Springer, Berlin, 1966.

［2］ T. Fujino, N. Ishikawa and M. Kamata: On the complex K-group of certain manifold, to appear

［3］ M. Imaoka and M. Sugawara: On the K-ring of the orbit manifold $(S^{2m+1} \times S^k)/D_n$ by the dihedral group D_n, to appear.

[4] M. Kamata : On complex cobordism groups of classifying spaces for dihedral groups, to appear.

[5] M. Kamata and H. Minami : Bordism groups of dihedral groups, J. Math. Soc. Japan, 25 (1973), 334-341.

[6] P.S. Landweber : Coherence, flatness and cobordism of classifying spaces, Proc. Adv. Study int., Aarhus, 1970.

[7] J. Milnor : On axiomatic homology theory, Pacific J. Math., 12 (1962), 337-341.

[8] K. Shibata : Oriented and weakly complex bordism of free metacyclic actions, to appear

[9] K. Shibata : Cobordism algebra of metacyclic groups, to appear

[10] D. Quillen : Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operation, Advanced in Math., 7 (1971), 29-56.