数理解析研究所講究録
第 203 巻 1974 年 14-28

不動点集合の次元について

阪大理　川久保 勝夫

§1. 序

Lie 群 G が多様体に作用している時，不動点の色々な性質を調べることは，変換群の研究のうちで興味ある問題の一つと思われる。今回は不動点集合の次元について限って考察してみたい。

少し歴史を振返ってみよう。この種類の問題については Conner-Floyd [3] が involution の時 Euler characteristic との関係で次元を評価したのが最初であると思われる。その後 Boardman [1] が，この結果を unoriented bordism との関係に拡張し，best possible に精密化した。semi-free S^1-action に関しては多様体の index との関係に於て，内田-川久保 [6] が不動点集合の次元を評価し，Ossa [8] は bordism との関係で評価した。

regular Z_p-action に関しては index との関係及び oriented bordism との関係で，不動点集合の次元を評価した[5]。一般の Z_{p^r}-action に関しては tom-Dieck が U-cobordism で実行した[9]。

又 $(Z_2)^k$-action では U 及び $\mathfrak{N}$ で可能である。やむを得ないことであると思うが，indecomposable な元以外は，不動点の集合の次元が何以上という形にはなっていない。しかしこの結果は画期的でその方法は Conner-Floyd の bordism theory と Atiyah-Bott-Segal-Singer の localization を結びつけたものである。この萌芽は Conner [2] に既に見られる。

ここでは oriented cobordism version を与えてみたい。$(Z_2)^k$-action に関しては余り満足のゆく結果が得られないので省略する。Z_{p^r}-action に関しては Kosniowski が mimeographed [7] で Atiyah-Bott の G-signature theorem の整数論的考察でやっているが筆者には証明になっているようには思われない。そこで別証を与えてみた。

証明は大ざっぱに言うと tom-Dieck の U を Ω で証明しなおすという方針。ひよっ Ω の方が少しいやらしいが結局 $\otimes Z[\frac{1}{2}]$ か又は $\otimes Z_p$ で考えてよいことが

分り，又不動点集合の normal bundle の complex structure は U の場合と異なり，action により入れるので U の場合の半分でよく，他方 $\Omega_* \otimes Z[\frac{1}{2}]$ が U の半分であるということとが，うまく対応している等々。

定理を述べるために，次の notation を導入しよう。

$$\{\Omega_0, \Omega_4, \Omega_8, \cdots \cdot \Omega_{4j}\} \text{ によって}$$

生成される $\Omega_* \otimes Z_p$ の subring を $\Omega(4j)$ と書く。

又不動点集合の次元 $\leqq k$ であるような Z_{p^r}-action を許す多様体によって代表される元全体により生成される $\Omega_* \otimes Z_p$ の subring を $F(Z_{p^r}, k)$ と書く。

この時 次の定理が成り立つ。

<u>定理</u>
$$\begin{cases} F(Z_{p^r}, 4k) = \Omega(4kp^r + 2p^r - 2) \\ F(Z_{p^r}, 4k+2) = \Omega(4kp^r + 4p^r - 4). \end{cases}$$

<u>系 1</u>　$[M]$: indecomposable in $\Omega_* \otimes Z_p$ の時 M 上の任意の Z_{p^r}-action に於て次の不等式が成立する。

$$\frac{\dim M+2}{p^r} - 2 \leqq \dim F$$

ここで F は不動点集合のうちで次元がいちばん大きいものを示す。

注意1 Kosniowski [7] にも類似の定理があるが，上の系は best possible なので Kosniowski の評価は，誤りと思われる。

系2．任意の $x \in \Omega_m$ は不動点の集合の次元が $\leqq \frac{m}{p^r}$ なる action を許す多様体で代表される。

§2. 証明のあらすじ．

$G = Z_{p^r}$ とおく． $\gamma_k : E_k^{SO}(G) \longrightarrow B_k^{SO}(G)$ を universal k 次元 real G-vector bundle とする。

$MSO_k(G)$ でその Thom space を表わそう。そしてこれを pointed G-space とみる。

V: real G-module とし $V^c = V \cup \{\infty\}$ を 1-point compactification とする。

この様な V 全体は direct system をなし，次の

equivariant G - cobordism が定義される。

$$\Omega_G^n \cong \varinjlim \left[V^c, \ MSO_{\dim V + n}(G)\right]_G^0.$$

V: real n-dim G-vector space

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & E^{SO}{}_n(G) \arrow[d] \\ pt \arrow[r] & B^{SO}{}_n(G) \end{tikzcd}$$

を classifying map とすると，自然に

$$t(V) : V^c \longrightarrow MSO_n(G)$$

を induce する。 $t(V) \in \tilde{\Omega}_G^n(V^c)$ で Thom class と呼ぶ。 $s : S^0 \longrightarrow V^c$ を原点と∞点に行く写像とした時， $e(V) = s^* t(V) \in \tilde{\Omega}_G^n(S^0) \cong \Omega_G^n$ を V の Euler class と呼ぶ。

$$S = \left\{ e(V) \,\middle|\, \begin{array}{l} V: \text{trivial summand を含まない} \\ \quad\quad \text{real } G\text{-module} \end{array} \right\}$$

とおくと Ω_G^* の multiplicative set となる。S による Ω_G^* の localization を $S^{-1}\Omega_G^*$ と書き $\lambda : \Omega_G^* \longrightarrow S^{-1}\Omega_G^*$ でその自然な写像を表わ

すことにしよう。

次に bundling map と言われるものを定義しよう。先ず $EG \longrightarrow BG$ を universal principal G-bundle とする。この時

$$\Omega_G^* \xrightarrow{\ \alpha\ } \Omega^*(BG)$$

を次の写像の composition より induce される写像で定義する。

$$
\begin{aligned}
&[V^c,\ MSO_{k+|V|}(G)]_G^0 \\
&\longrightarrow [V^c \wedge EG^+,\ MSO_{k+|V|}(G) \wedge EG^+]_G^0 \\
&\longrightarrow [V^c \wedge EG^+/G,\ MSO_{k+|V|}(G) \wedge EG^+/G]^0 \\
&\longrightarrow [V^c \wedge EG^+/G,\ MSO(k+|V|)]^0 \\
&\longrightarrow \Omega^{k+|V|}((V^c \wedge EG^+)/G) \\
&\longrightarrow \Omega^k(BG)
\end{aligned}
$$

この α という写像は Ω_G^* という計算しにくいものを普通の cobordism に関係づけたという大きな意味がある。

$\Omega^*(BG)$ での Euler class を定義しよう。
先ず V: real G-module 考え universal principal G-bundle $EG \longrightarrow BG$ に associate した次の bundle を考える。

$$\begin{array}{ccc} V \times EG/G & \longrightarrow & E^{SO}(|V|) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG & \longrightarrow & BSO(|V|) \end{array}$$

上の diagram は classifying map を示す。
この写像は自然に $f: V^c \wedge EG^+/G \longrightarrow MSO(|V|)$ を induce する。$s: BG \rightarrow V^c \wedge EG^+/G$ で zero cross section を表わす時

$$e(V) \stackrel{\mathrm{def}}{=} [fs] \in \Omega^{|V|}(BG)$$

上で定義した α は Euler class を preserve する。
前と同様

$$S = \left\{ e(V) \;\middle|\; \begin{array}{l} V: \text{trivial summand を含まない} \\ \quad \text{real } G\text{-module} \end{array} \right\}$$

とおくと $\Omega^*(BG)$ の multiplicative set となる。
S による $\Omega^*(BG)$ の localization を $S^{-1}\Omega^*(BG)$ と書き $\lambda: \Omega^*(BG) \longrightarrow S^{-1}\Omega^*(BG)$ でその自然な写像を

表わすことにする。α が Euler class を preserve することから，次の diagram が出来る，

$$\begin{tikzcd}
\Omega^*_G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda"'] & \Omega^*(BG) \arrow[d, "\lambda"'] \\
S^{-1}\Omega^*_G \arrow[r, "S^{-1}\alpha"] & S^{-1}\Omega^*(BG)
\end{tikzcd}$$

又 1点 $\longrightarrow$ BG なる写像により $\Omega^*(BG) \xrightarrow{\pi} \Omega^*$ が induce され，又 $\Omega^* \xrightarrow{D} \Omega_{-*}$ なる自然な写像もある。以上はすべて spectrum より定義された cobordism であるが幾何学的な cobordism は勿論ある。それを $g\Omega^G_*$ と書くことにすると，Pontrjagin Thom construction により

$$i : g\Omega^G_* \longrightarrow \Omega^G_*$$

を得るが一般にはもはや同型ではない。

又 G-action に対して その不動点集合と normal bundle（表現をこめて）を対応させることにより

$$F : g\Omega^G_* \longrightarrow \bigoplus \Omega_*(\Pi BU(n_i))$$

をうる。

補題 1. 次の写像の結合

$$g\Omega_n^G \xrightarrow{i} \Omega_n^G \xrightarrow{\alpha} \Omega^{-n}(BG) \xrightarrow{\pi} \Omega^{-n} \xrightarrow{D} \Omega_n$$

は G-action (M^n, G) に $[M] \in \Omega_n$ を対応させる写像である。

補題 2. $D\pi\Lambda^{-1}(0) = p\Omega_n$

補題 3. 定: $S^{-1}\Omega_*^G \cong \Omega_*(\prod_j BU) \otimes Z[V_j, V_j^{-1}]$

ここで $1 \leq j \leq (p^r-1)/2$ で V_j は complex 1 次元の vector space で Z_{p^r}-action は generator $\exp 2\pi i/p^r$ が $\exp 2\pi j i/p^r$ 倍で作用するものを示す。

次 $\oplus \Omega_*(\Pi BU(n_j)) \underset{\omega}{\longrightarrow} \Omega_*(\prod_j BU) \otimes Z[V_j, V_j^{-1}]$ を定義しよう。

$$b : \Pi BU(n_j) \to \Pi BU$$

で stablize map を表わすとき

$$\omega(y) \overset{def}{=\!=} b_*(y) \otimes \Pi(V_j^{-n_j}).$$

次 $\nu : BU \to BU$ で H-space inverse map

を表わし，その積を $n = \prod \nu$ とおく．

補題4．次の diagram は可換である

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{G}\Omega_*^G & \xrightarrow{\quad i \quad} & \Omega_*^G \\
 & & \lambda \downarrow \\
\boxed{H} \downarrow & & S^{-1}\Omega_*^G \\
 & & \Phi \,\Vert\!\wr \\
\bigoplus \Omega_*(\prod BU n_j) & \xrightarrow{(n_*\otimes 1)\cdot w} & \Omega_*(\prod_j BU) \otimes Z[V_j, V_j^{-1}]
\end{array}$$

前に出て来た diagram の一部を $\otimes Z_p$ で書いてみると

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega_*^G \otimes Z_p & \xrightarrow{\alpha\otimes 1} & \Omega^*(BG)\otimes Z_p & \xrightarrow{\pi\otimes 1} & \Omega^*\otimes Z_p & \xrightarrow{D\otimes 1} & \Omega_*\otimes Z_p \\
\downarrow \lambda\otimes 1 & & \downarrow \lambda\otimes 1 & & & & \\
S^{-1}\Omega_*^G\otimes Z_p & \xrightarrow{S^{-1}\alpha\otimes 1} & S^{-1}\Omega^*(BG)\otimes Z_p & & & & \\
\cong \downarrow \Phi\otimes 1 & & & & & & \\
\Omega_*(\prod_j BU)\otimes Z_p[V_j, V_j^{-1}] & & & & & &
\end{array}$$

補題2より次を得る

補題5　$(D\otimes 1)\cdot(\pi\otimes 1)\cdot(\lambda\otimes 1)^{-1}\cdot(S^{-1}\alpha\otimes 1)$ は Image $(\lambda\otimes 1)$ 上で well-defined ring homomorphism.

ここで次の記号を導入する

$$F_k = \left\{ \bigoplus_{i \leq k} \Omega_i \left(\prod_j BU\right) \otimes Z_p\left[V_j^{-1}\right] \text{により生成される subring} \right\}$$

$$D_k = F_k \cap \mathrm{Image}\{(\Phi\otimes 1)\cdot(\lambda\otimes 1)\}$$

さて定理の

$$F(Z_{p^r}, 4k) = \Omega(4kp^r + 2p^r - 2)$$

を証明しよう。

$$F(Z_{p^r}, 4k) \supset \Omega(4kp^r + 2p^r - 2)$$

は実際に構成すればよく、tom-Dieck [9] の例に従えばよい。逆の方が問題である。

F_{4k} は $kp^r + \frac{p^r-1}{2}$ 個の不定元の Z_p 上 polynomial ring となる。

今 G-action (M, G) で $[M] \in F(Z_{p^r}, 4k) - \Omega(4kp^r + 2p^r - 2)$ と仮定しよう。明らかに

$$(\eta_*\otimes 1)\cdot w\cdot F[M, G] \in D_{4k}$$

となる。

一方上の包含関係を示す時に作った例は次の性質をもつように可能である。Z_{p^r} ー多様体 (M_i, Z_{p^r}) で

(i) $\dim M_i = 4i$

(ii) $(m_* \otimes 1) \cdot w \cdot F[M_i, Z_{p^r}] \in D_{4k}$

(iii) $[M_i]$ は $\Omega_* \otimes Z_p$ の生成元である。

D_{4k} は F_{4k} の一部であるから Z_p 上の超越次数は高々 $kp^r+(p^r-1)/2$ である。上で作った例により D_{4k} には既に

$$(m_* \otimes 1) \cdot w \cdot F[M_i, Z_{p^r}] \qquad i=1, 2, \cdots kp^r+(p^r-1)/2$$

という $kp^r+(p^r-1)/2$ 個の代数的に独立な元が存在するのでこの集合に $(m_* \otimes 1) \cdot w\ F(M, Z_{p^r})$ を加えると代数的に独立でなくなる。よって補題 1及び5より

$$[M],\quad [M_i] \qquad i=1, 2, \cdots kp^r+(p^r-1)/2$$

は代数的に独立でない。$\Omega_* \otimes Z_p$ は各4i次元に生成元をもつ polynomial ring であるから始めの仮定は上の集合が代数的に独立であることを示しているから，矛盾である。よって

$$F(Z_{p^r}, 4k) \subset \Omega(4kp^r+2p^r-2)$$

が示された。

他の等式

$$F(Z_{p^r}, 4k+2) = \Omega(4kp^r+4p^r-4)$$

も同様である。

又 系1は定理よりすぐ出るし 系2は 定理を帰納的に

使うことにより証明される。

注意2　Conner - Floyd [4] は Z_{p^r} が M に不動点なしに作用した時 $p \mid [M]$ in Ω_* を示した。よって不動点集合の次元を調べるのに $\otimes Z_p$ で考えるのが自然である。

注意3　内田 [10] は $SU(n)$ action 等 non abelian group action では不動点なしに働く場合が多いことを示し abelian group とはこの種の問題では全く違った様相を呈することを示した。

注意4　定理は $k=-1$ とおくことにより Conner - Floyd [4] の結果を含んでいる。

参考文献

[1] Boardman. J. M.: On manifolds with involution, Bull. A.M.S. 73 (1967), 136-138.

[2] Conner P. E.: Seminar on Periodic Maps, Springer-Verlag 46 (1967).

[3] Conner P. E. and Floyd E. E.: Differentiable periodic maps. Springer (1964)

[4] ——————————: Maps of odd period, Ann of Math. 84 (1966) 132-156.

[5] Kawakubo K.: The index of Z_p-actions (mimeographed).

[6] Kawakubo K. and Uchida; The index of a semi-free S^1-action, J. Math. Soc. Japan 23 (1971), 351-355.

[7] Kosniowski C. What the fixed points say about a Z/p manifold, (mimeographed).

[8] Ossa E. Cobordismentheorie von Fixpunktfreien und semeifreien S^1-manigfaltigkeiten. Thesis Bonn (1969).

[9] Tamno tom Dieck ; Periodische Abbildungen unitären Manigfaltigkeiten, Math. Z. 126, 275–295 (1972).

[10] Uchida F. 不動点をもたない $SU(n)$ 作用を許す弱複素多様体について. (these proceedings).