数理解析研究所講究録
第 203 巻 1974 年 35-41

不動点をもたない$SU(n)$作用を許す弱複素多様体について

阪大理　内田伏一

§1. 序

弱複素多様体のコボルディズム環を $U_* = \bigoplus_{n\geq 0} U_{2n}$ とする．コンパクトリイ群Gに対して，U_* のイデアルで，不動点をもたない弱複素G作用を許す弱複素多様体の表わすコボルディズム類の全体を $SF_*(G)$ で表わす．

Gがアーベル群のとき，$SF_*(G)$ の構造は tom Dieck [1] によって研究されている．この報告において，Gが特殊ユニタリ群 $SU(n)$，およびユニタリ群 $U(n)$ の場合について，$SF_*(G)$ の構造を研究する．

コボルディズム環 U_* は環として，

$$\{ [P_n(\mathbb{C})], [H_{p,q}(\mathbb{C})], n\geq 0, p\geq q>0 \}$$

によって生成されることが知られている．整数 $n\geq 2$ に対して，自然数の集合 $A(n)$ を

$$A(n)=\left\{ \binom{n+k_1-1}{k_1}+\cdots+\binom{n+k_r-1}{k_r} \;\middle|\; r\geqq 1,\ k_1\geqq\cdots\geqq k_r\geqq 1 \right\}$$

によって定義し，

$$\{[P_{k-1}(\mathbb{C})],\ [H_{k+a-1,k-1}(\mathbb{C})] \mid k\in A(n),\ a\geqq 0\}$$

によって生成される U_* のイデアルを $U_*^{(n)}$ とする．　このとき次の結果が得られる．

定理．　整数 $n\geqq 2$ に対して，

$$U_*^{(n)}\subset SF_*(SU(n)),\quad U_*^{(n)}\subset SF_*(U(n))$$

が成り立つ．

系．　$SF_*(SU(2))=SF_*(U(2))=\underset{n>0}{\oplus}U_{2n}$．

§2.　線型作用

Gをコンパクトリイ群とし，Vを有限次元複素Gベクトル空間とする．　このとき，複素射影空間 P(V) は，G作用を

$$g\cdot[v]=[g\cdot v],\quad g\in G,\quad 0\neq v\in V$$

によって定義するとき，（弱）複素G多様体になる．　このとき，次の結果が容易に証明できる．

補題．　G多様体 P(V) が不動点をもつための必要十分条件は，複素Gベクトル空間VがG不変な1次元部分空間をもつことである．

$V^* = Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ 上のG作用を

$$(g \cdot u)(v) = u(g^{-1} \cdot v), \quad g \in G, \ u \in V^*, \ v \in V$$

によって定義する．

V，Wを有限次元複素Gベクトル空間とするとき，複素G多様体 $P(V \oplus W) \times P(V^*)$ のG不変な部分多様体が

$$H(V \oplus W, V^*) = \{([v \oplus w], [u]) \mid u(v) = 0\}$$

によって定義できる． G多様体 $P(V^*)$ が不動点をもたなければ，$H(V \oplus W, V^*)$ も不動点をもたない．

$\dim V = p$，$\dim W = q$ とし，VがG不変な1次元部分空間をもたないとする． 上記，$P(V)$，$H(V \oplus W, V^*)$ を考えることによって，$P_{p-1}(\mathbb{C})$，$H_{p+q-1, p-1}(\mathbb{C})$ が，不動点をもたない弱複素G作用を許すことになる．

§3. $SU(n)$ の既約表現

前節の考察によって，定理を証明するには，$\binom{n+k-1}{k}$ 次元の複素 $SU(n)$ ベクトル空間で，1次元不変部分空間をもたないものを与えれば十分である． （$SU(n)$ の複素表現は常に $U(n)$ の表現に拡張できる）

$X_1, \cdots, X_n$ を不定元とする複素数係数の次数kの斉次多項式全体の作る複素ベクトル空間を $V_{(n,k)}$ で表わす．

$A=(a_{ij})\in U(n)$, $f\in V_{(n,k)}$ に対して，$Af\in V_{(n,k)}$ を

$$(Af)(X_1,\cdots,X_n)=f\left(\sum_i a_{i1}X_i,\ \cdots,\ \sum_i a_{in}X_i\right)$$

によって定義すれば，$V_{(n,k)}$ は $U(n)$ の表現空間となる．すなわち，$V_{(n,k)}$ は $\binom{n+k-1}{k}$ 次元複素 $U(n)$ ベクトル空間である．　$n\geqq 2$, $k\geqq 1$ に対して

(1)　　　$\dim V_{(n,k)} < \dim V_{(n,k+1)}$

が成り立つことを注意しておこう．

ここで，次の命題を証明しよう．

<u>命題</u> (a_n)：すべての $k\geqq 1$ に対して，$V_{(n,k)}$ は $SU(n)$ の表現空間として既約である．

証明．　$SU(n)$ 不変な線型写像 $V_{(n,k)}\longrightarrow V_{(n,k)}$ がスカラー積に限ることを証明すれば十分である．

(a_2) が成り立つこと．　直接証明できるが，山内－杉浦[2]，p.60～61，p.74～76，p.125～126 を参照せよ．

以下，$(a_n)\Rightarrow(a_{n+1})$ を示そう．

さて，φ_1, φ_2 : $SU(n)\longrightarrow SU(n+1)$ を，$A\in SU(n)$ に対して，

$$\varphi_1(A)=\begin{pmatrix}A&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \varphi_2(A)=\begin{pmatrix}1&0\\0&A\end{pmatrix}$$

によって定義される準同型写像とする．　このとき，$V_{(n+1,k)}$

は，φ_1，φ_2 によって，$SU(n)$ の表現空間として次のように分解される．

(2) $V_{(n+1,k)} \cong (V_{(n,k)} \otimes X_{n+1}^0) \oplus (V_{(n,k-1)} \otimes X_{n+1}^1) \oplus \cdots \oplus (V_{(n,0)} \otimes X_{n+1}^k)$,

(3) $V_{(n+1,k)} \cong (X_1^0 \otimes V_{(n,k)}) \oplus (X_1^1 \otimes V_{(n,k-1)}) \oplus \cdots \oplus (X_1^k \otimes V_{(n,0)})$.

ここに，$V_{(n,0)} = \mathbb{C}$ は自明表現であり，$V_{(n,1)}, \cdots, V_{(n,k)}$ は，帰納法の仮定によって，$SU(n)$ の既約表現であって，不等式 (1) によって，互いに同型にならないものである．

いま，$P : V_{(n+1,k)} \longrightarrow V_{(n+1,k)}$ を $SU(n+1)$ 不変な線型写像とする．　P を，φ_1，φ_2 を通して，$SU(n)$ 不変な線型写像とみるとき，上の注意と，Schur の補題によって，$i = 0, 1, \cdots, k$ に対して，複素数 α_i，β_i が存在して，

$$P(X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} X_{n+1}^{i}) = \alpha_i \cdot X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} X_{n+1}^{i},$$

但し，$i_1 + \cdots + i_n + i = k$

$$P(X_1^{i} X_2^{i_2} \cdots X_{n+1}^{i_{n+1}}) = \beta_i \cdot X_1^{i} X_2^{i_2} \cdots X_{n+1}^{i_{n+1}},$$

但し，$i + i_2 + \cdots + i_{n+1} = k$

が成り立つ．　$n \geqq 2$ であるから，これ等の式から，

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_k$$

が成り立つ．　すなわち，P はスカラー積である．(証明終)

§4. $SU(n)$ の閉部分群

前節までにおいて，$SU(n)$の線型作用を構成することによって，イデアル $SF_*(SU(n))$ の一つの下界 $U_*^{(n)}$ が求められたのであるが，ここでは，$SU(n)$の閉部分群の次元を考えることによって，$SF_*(SU(n))$ の一つの上界を求めよう．

多様体としての $SU(n)$の次元は n^2-1 であり，Mann [3] の表によれば，$SU(n)$の真閉部分群の最大次元は $(n-1)^2$ である． 従って，$SU(n)$作用の軌道の次元を考えることによって，次の結果が成り立つ．

<u>補題</u>． $k<2(n-1)$ のとき，k次元多様体上の$SU(n)$作用は常に自明作用である．

この結果，次の関係が成り立つ．

$$SF_*(SU(n)) \subset \bigoplus_{k \geq n-1} U_{2k}. \tag{4}$$

上述の Mann の結果は $n=4$ のとき正しくない． すなわち $SU(4)$ には 10次元の閉部分群が存在する． 従って，上の補題は修正を要するが，(4) には影響を及ぼさないことが分かる．

参考文献

[1] T. tom Dieck : Kobordismentheorie klassifizierender Räume und Transformationsgruppen, *Math. Zeit.* 126 (1972), 31 - 39.

[2] 山内・杉浦：連続群論入門，培風館

[3] L.N. Mann : *Gaps in the dimensions of transformation groups*, Ill. J. Math. 10 (1966), 532 - 546.