数理解析研究所講究録
第 203 巻 1974 年 109-121

Involution をもつ多様体における中岡の coincidence theorem について

東大理　服部晶夫

§0. 序

Mをコンパクト多様体とする。~~古典~~的なLefschetzの不動点定理は，"$f: M \to M$ の不動点集合が空であるならば，fのLefschetz数 $\chi(f)$ が零になる"ことを保証する。いまM, Nを境界のないコンパクト多様体で，それぞれinvolutionをもっているとしよう。[中岡 I] に従って，どちらのinvolutionもTと書くことにする。$f: N \to M$ に対し

$$A(f) = \{ y \mid y \in N,\ fT(y) = Tf(y) \}$$

とおく。中岡の理論は $A(f) \neq \phi$ となる判定条件を与えるもので，例えば $\dim N = \dim M$ のときは半Lefscchetz数とも呼ばるべき数 $\hat{\chi}(f)$ が定義され，"$A(f) = \phi \Longrightarrow \hat{\chi}(f) = 0$" が証明される。Lefschetzの場合，$f =$ identity ならば $\chi(f)$ はMの Euler characteristic に等しかったが，中岡の場合には

$f =$ identity のとき $\hat{\chi}(f)$ は M の Kervaire semi-characteristic $\hat{\chi}(M)$ に等しいことに注意する。

さて，Lefschetz の定理は，M が境界のないコンパクト多様体である場合には，"f のグラフ $\Gamma(f)$ と $M \times M$ の対角線集合 $d(M)$ の intersection number が $\chi(f)$ に等しい" という形に述べられることはよく知られている。intersection は bordism 的な量であり，文献では試みられていないようだが，Lefschetz の定理自体も bordism 的見地から捉えることにより透明な解釈が得られる。したがって同種の問題である中岡の定理の場合も bordism 的取扱いが有効であろうと考えるのはごく自然である。本稿の目的は，実際に，Z_2-係数の通常のコホモロジー理論の代りに，unoriented cobordism theory $\mathfrak{N}^*$ に対して中岡の定理に定式化を与えることである。[中岡 I, II] には通常のコホモロジー理論に固有の性質を用いているところがあるので，そのままでは $\mathfrak{N}^*$-theory には使えない。本稿のやり方は $\mathfrak{N}^*$-theory にも通常のコホモロジー理論にも共通の性質のみを使うものである。簡単のため，[中岡 I] に相当する部分のみに限り，また [中岡 I] との重複をさけるため要点のみを述べることにしたい。

§1. $\mathfrak{N}^*$-theory の準備

$\mathfrak{N}^*$-theory は Thom spectrum MO を用いて定義される cohomology theory で，いわゆる Poincaré-Atiyah duality が成立つ（例えば［Conner-Floyd］参照）。考察する空間が多様体のみである場合には，この duality から出発して，theory をすべて幾何学的に構成することができる。視覚的な理解を得るためにはこの方式は最適であろう。以下簡単のため境界のない多様体に対して，この方式に従って $\mathfrak{N}^*$-theory の要点を述べる。今後断わらない限り，多様体はコンパクトで境界のない微分可能多様体を意味するものとする。

多面体 M に対して $\mathfrak{N}_q(M)$ は，通常のように，q-dim bordism chain $[X, g]$ 全体のつくる群とする。ここで X は q 次元多様体，$g: X \longrightarrow M$ である。M が m 次元多様体のとき，

$$\mathfrak{N}^q(M) = \mathfrak{N}_{m-q}(M)$$

と定義する。n 次元多様体 N から m 次元多様体 M への写像 $f: N \longrightarrow M$ に対し Gysin homomorphism

$$f_! : \mathfrak{N}^q(N) \longrightarrow \mathfrak{N}^{q+m-n}(M)$$

を通常の induced homomorphism $f_*: \mathfrak{N}_{n-q}(N) \longrightarrow \mathfrak{N}_{n-q}(M)$ により定義する。すなわち，

$$f_![X,g] = [X, f\circ g]$$

である。

一方 cohomology としての induced homomorphism

$$f^* : \mathfrak{N}^q(M) \longrightarrow \mathfrak{N}^q(N)$$

は次のように定義する。$[X,g] \in \mathfrak{N}^q(M) = \mathfrak{N}_{m-q}(M)$ に対し，"pull-back diagram"

$$\begin{tikzcd}
N \underset{M}{\times} X \arrow[r] \arrow[d, "h=\text{projection}"] & X \arrow[d, "g"] \\
N \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd}$$

を考えよう。$Y = N \underset{M}{\times} X$ は一般には多様体にはならないが，f と g をごく僅か修正することにより $f\times g : N\times X \to M\times M$ が対角線集合 $d(M)$ 上 transverse regular になるようにすれば Y は多様体になる。そのような修正によって bordism class $[X,g]$ やfのホモトピー類は変らない。そこではじめから Y は多様体になっているとしてよく，

$$f^*[X,g] = [Y, h]$$

が意味をもつ。

上の定義から直ちに

<u>Proposition</u> (1.1). $u=[X,g]\in \mathfrak{N}^*(M)$ と $f:N\longrightarrow M$ に対して $g(X)\cap f(N)=\phi$ であるならば, $f^*u=0$ である.

次に cross product $\mathfrak{N}^p(M)\times\mathfrak{N}^q(N)\longrightarrow\mathfrak{N}^{p+q}(M\times N)$ は $[X,g]\times[Y,h]=[X\times Y, g\times h]$ で定義し, cup product $\mathfrak{N}^p(M)\times\mathfrak{N}^q(M)\longrightarrow\mathfrak{N}^{p+q}(M)$ は

$$u\smile v = d^*(u\times v)$$

で定義する. $d:M\longrightarrow M\times M$ は対角線写像である. 以後 $u\smile v$ を単に uv と書くこともある.

P^n は n 次元実射影空間とし, $i_n: P^n\subset P^{n+1}$ は通常の embedding とする。$[P^{n-1}, i_{n-1}]\in\mathfrak{N}^1(P^n)$ を $w_1^{(n)}$ と書く。$i_n^*(w_1^{(n+1)})=w_1^{(n)}$ となることは容易に証明される. 無限次元射影空間 $P^\infty=\varinjlim_n P^n$ に対し $\mathfrak{N}^*(P^\infty)=\varprojlim_n \mathfrak{N}^*(P^n)$ と定義すると, これから $w_1=(w_1^{(n)})\in\mathfrak{N}^*(P^\infty)$ が得られる。今後 $w_1^{(n)}$ をも単に w_1 と書く. double covering π : $N\longrightarrow M$ に対しその classifying map を $\theta: M\longrightarrow P^\infty$ として, $w_1(\pi)=\theta^*w_1\in\mathfrak{N}^1(M)$ と定義する. 混同のおそれのない場合には $w_1(\pi)$ をも w_1 と書く。

<u>Proposition</u> (1.2). M を多様体で $N\xrightarrow{\pi}M$ は double

covering とする. $\mathfrak{N}^*$-theory における π の Gysin sequence

$$\cdots \xrightarrow{\cup w_1} \mathfrak{N}^q(M) \xrightarrow{\pi^*} \mathfrak{N}^q(N) \xrightarrow{\pi_!} \mathfrak{N}^q(M) \xrightarrow{\cup w_1} \mathfrak{N}^{q+1}(M) \to \cdots$$

は exact である。

証明は容易である. 系として

<u>Corollary</u> (1.3). $\mathfrak{N}^*(P^\infty)$ は unoriented cobordism ring $\mathfrak{N}^*$ 上の formal power series ring $\mathfrak{N}^*[[w_1]]$ に等しい。

§2. $\mathfrak{N}^*_{Z_2}$-theory

T を多様体 M 上の smooth involution とする. $T=1$ であってもよい。S^n 上の antipodal involution をも T と書く. $S^\infty = \varinjlim S^n$ とすると $S^\infty \times_T M$ は double covering $S^\infty \to P^\infty$ に associate され M を fiber とする bundle である。そこで, equivariant cohomology theory $\mathfrak{N}^*_{Z_2}$ を

$$\mathfrak{N}^*_{Z_2}(M) = \mathfrak{N}^*(S^\infty \times_T M)$$

で定義する。もちろん右辺は $\varprojlim \mathfrak{N}^*(S^n \times_T M)$ を意味する。

N も involution T をもっていて, $f: N \to M$ が equivariant, すなわち $fT = Tf$ であれば, Gysin homomorphism $(1 \times_T f)_! : \mathfrak{N}^*(S^\infty \times_T N) \to \mathfrak{N}^*(S^\infty \times_T M)$, induced homomorphism

$(1\underset{T}{\times}f)^*: \mathfrak{N}^*(S^\infty\underset{T}{\times}M) \longrightarrow \mathfrak{N}^*(S^\infty\underset{T}{\times}N)$ がある。それらを，$\mathfrak{N}^*_{Z_2}$-theory では単に $f_!$，f^* と書くことにする。

多様体 M に対して直積多様体 $M^2=M\times M$ は involution $T(x,y)=(y,x)$ をもつ。われわれの当面の目標はこの T に対して $\mathfrak{N}^*_{Z_2}(M^2)$ の構造を定めることである。そのためには，通常のコホモロジーにおける Steenrod operation との類似により tom Dieck により導入された

$$P:\ \mathfrak{N}^q(M) \longrightarrow \mathfrak{N}^{2q}_{Z_2}(M^2)$$

が重要である。それは

$$P[X,g] = [S^\infty\underset{T}{\times}X^2,\ 1\underset{T}{\times}g^2]$$

で定義される。別の言葉でいえば，

$$P(g_!(1)) = g^2_!(1)$$

である。

定義から直ちに次の Lemma を得る．

<u>Lemma</u> (2.1). $\pi: S^\infty\times M^2 \longrightarrow S^\infty\underset{T}{\times}M^2$ を射影とすると，

$$\pi^*: \mathfrak{N}^*_{Z_2}(M^2)=\mathfrak{N}^*(S^\infty\underset{T}{\times}M^2) \longrightarrow \mathfrak{N}^*(S^\infty\times M^2)=\mathfrak{N}^*(M^2)$$

により

$$\pi^*P(u) = u\times u$$

である。

次の Lemma の証明も困難ではない。

Lemma (2.2). π は (2.1) と同じものとする。そのとき

$$\pi^*\pi_!(u\times v)=u\times v+v\times u\in \mathfrak{N}^*(M^2)$$

が成立つ.

次の Proposition については例えば [Conner - Floyd] を参照されたい。

Proposition (2.3). $\mathfrak{N}^*(M)\cong \mathfrak{N}^*\otimes_{\mathbb{Z}_2} H^*(M;\mathbb{Z}_2)$ である. 従って, cross-product は同型 $\mathfrak{N}^*(M)\otimes_{\mathfrak{N}^*}\mathfrak{N}^*(M)\cong \mathfrak{N}^*(M\times M)$ を induce する.

以上の準備の下に $\mathfrak{N}^*_{\mathbb{Z}_2}(M^2)$ に関して次の Theorem を得る.

Theorem (2.4). Mは多様体とする. (2.3)により $\mathfrak{N}^*(M)$ は free $\mathfrak{N}^*$-module であるが, $x_1,\cdots,x_\ell$ をその homogeneous basis とする. $\mathfrak{N}^*_{\mathbb{Z}_2}(pt)=\mathfrak{N}^*(P^\infty)$ は自然に $\mathfrak{N}^*_{\mathbb{Z}_2}(M^2)$に作用する。 A^* を $P(x_1),\cdots,P(x_\ell)$ で生成される free $\mathfrak{N}^*(P^\infty)$-module とすると,

$$\mathfrak{N}^*_{\mathbb{Z}_2}(M^2)=A^*\oplus \pi_!\text{-image}$$

であり, $\pi_!$-image には $\mathfrak{N}^*(P^\infty)=\mathfrak{N}^*[[w_1]]$ は trivial に作用する. また $\pi_!$-image は $\pi_!(x_i\times x_j)$, $1\leq i<j\leq \ell$ で生成される free $\mathfrak{N}^*$-module である.

証明. (2.1), (2.2), (2.3) から $\operatorname{Ker}\pi_!\subset \mathfrak{N}^*(M^2)$ は $x_i\times x_i$, $x_i\times x_j+x_j\times x_i$ $(i<j)$ で生成される free $\mathfrak{N}^*$-module である. しかも, (1.2), (2.1), (2.2) により

$A^* \cap \pi_!$-image $= 0$ であり，$\pi^*: A^* \oplus \pi_!$-image $\longrightarrow \ker \pi_!$ は全射である。$A^q = A^* \cap \mathfrak{N}^q_{\mathbb{Z}_2}(M^2)$ とおいて，

$$\mathfrak{N}^q_{\mathbb{Z}_2}(M^2) = A^q \oplus \pi_!\text{-image}$$

をいえばよい。q に関する induction による。q まで成立つているとすると $\underbrace{\text{short}}_{}$ (1.2)により exact sequences の morphism

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{N}^q_{\mathbb{Z}_2}(M^2)/_{\pi_!\text{-image}} & \xrightarrow{\cup w_1} & A^{q+1} \oplus \pi_!\text{-image} & \xrightarrow{\pi^*} & \ker \pi_! & \to & 0 \\ & & \| & & \cap & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{N}^q_{\mathbb{Z}_2}(M^2)/_{\pi_!\text{-image}} & \xrightarrow{\cup w_1} & \mathfrak{N}^{q+1}_{\mathbb{Z}_2}(M^2) & \xrightarrow{\pi^*} & \ker \pi_! & \to & 0 \end{array}$$

を得るから，"Five Lemma" により $\mathfrak{N}^{q+1}_{\mathbb{Z}_2}(M^2) = A^{q+1} \oplus \pi_!$-image である。

<u>Corollary</u> (2.5). 任意の自然数 k に対して，$\mathfrak{N}^*_{\mathbb{Z}_2}(M^2)$ では

$$\ker(\cup w_1^k) = \ker(\cup w_1) = \pi_!\text{-image}$$

である。

<u>Remark</u> P を通常の Steenrod operation とすれば，(1.2) 以下 (2.5) までは $\mathfrak{N}^*$ の代りに $H^*(\ ;\mathbb{Z}_2)$-theory でもそのまま成立つ。

§3 中間の class Δ_N

M を多様体，T を M 上の smooth involution とする．Δ:

$M \longrightarrow M^2$ を $\Delta(x)=(x, Tx)$ で定義すると，これは§2で与えたM^2の involution Tに関して equivariant である。Nを多様体，TをN上の free involution とすると，$N \underset{T}{\times} M$，$N \underset{T}{\times} M^2$ も多様体であり，$1 \underset{T}{\times} \Delta : N \underset{T}{\times} M \longrightarrow N \underset{T}{\times} M^2$ が induce されている．(M, T) と (N, T) に対して中国の class $\Delta_N \in \mathfrak{N}^m(N \underset{T}{\times} M^2)$，$m=\dim M$，を

$$\Delta_N = (1 \underset{T}{\times} \Delta)_!(1)$$

で定義する．ここでもちろん1は $[N \underset{T}{\times} M, 1] \in \mathfrak{N}^0(N \underset{T}{\times} M)$ のことである。したがって $\Delta_N = [N \underset{T}{\times} M, 1 \underset{T}{\times} \Delta]$。

写像 $f: N \longrightarrow M$ に対して，$\hat{f} : N \longrightarrow N \times M^2$ を $\hat{f}(y) = (y, f(y), fT(y))$ で定義する．これは両方のTに関して equivariant だから，$\hat{f}_T : N_T = N/T \longrightarrow N \underset{T}{\times} M^2$ を induce する。

<u>Theorem</u> (3.1). $A(f)=\phi$ ならば $\hat{f}_T^{\,*}(\Delta_N)=0$ である。

証明．$\hat{f}^{-1}((1\times\Delta)(N\times M)) = A(f)$ であるから，

$$\hat{f}_T^{-1}((1 \underset{T}{\times} \Delta)(N \underset{T}{\times} M)) = A(f)/T$$

である。したがって，$A(f)=\phi$ ならば (1.1) により

$$\hat{f}_T^{\,*}(\Delta_N) = 0 .$$

次の問題は Δ_N の explicit な表示を得ることであり，それがわれわれの目標である。M上のTが free involution であるときは，その解答は次の定理により与えられる。

Theorem (3.2). M は多様体で，T は M 上の free involution とする．free $\mathfrak{N}^*$-module としての $\mathfrak{N}^*(M)$ の homogeneous basis $x_1, \cdots, x_\ell$ をとり，$\Delta_!(1) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i \times x_j \in \mathfrak{N}^m(M^2)$，$a_{ij} \in \mathfrak{N}^*$，とおく。そのとき

1) $a_{ii} = 0$，$a_{ij} = a_{ji}$ である。

2) $\pi : N \times M^2 \longrightarrow N \underset{T}{\times} M^2$ により，

$$\Delta_N = \sum_{1 \le i < j \le \ell} a_{ij}\, \pi_!(1 \times x_i \times x_j).$$

3) $p : M \longrightarrow pt$（＝一点）により $c_{jk} = p_!(x_j \cup T^* x_k) \in \mathfrak{N}^*$ とすると，

$$\sum_j a_{ij}\, c_{jk} = \delta_{jk}$$

が成立つ。

証明．容易にたしかめられるように，Δ_N は (N, T) に関して functorial である。すなわち，free involution T をもつ多様体 N' と equivariant な $\varphi : N' \longrightarrow N$ に対して，

$$\Delta'_N = (\varphi \underset{T}{\times} 1^2)^*(\Delta_N).$$

これから (N, T) としては universal なもの (S^n, T)，$n = 1, 2, \cdots$，を考えればよい。極限に移って (S^∞, T) を考えればよい。その場合には $\mathfrak{N}^*(S^\infty \underset{T}{\times} M^2) = \mathfrak{N}^*_{\mathbb{Z}_2}(M^2)$ であり，$\mathfrak{N}^*_{\mathbb{Z}_2}$-theory の意味で，

$$\Delta_{S^\infty} = \Delta_!(1)$$

である。以下 $\Delta_\infty = \Delta_{S^\infty}$ と書く。

M上のTが free であれば，$\Delta(M) \cap d(M) = \phi$ であり，$d(M)$ は M^2 上のTの固定点集合であることに注意すると，[tom Dieck] の localization theorem により次の Lemma を得る。

Lemma (3.3). M上Tは free であるとする。そのとき ~~適当~~ な $k \geq 1$ が存在して

$$w_1^k \Delta_\infty = 0 \in \mathcal{N}_{Z_2}^*(M^2)$$

となる。

この (3.3) と (2.5) から $\Delta_\infty \in \pi_!$-image となる。したがって (2.4) により

$$\Delta_\infty = \sum_{i<j} a_{ij}\, \pi_!(x_i \times x_j)$$

の形となる。ところが，$\pi^* : \mathcal{N}_{Z_2}^*(M^2) = \mathcal{N}^*(S^\infty \underset{T}{\times} M^2) \longrightarrow \mathcal{N}^*(S^\infty \times M^2) = \mathcal{N}^*(M^2)$ により $\pi^*\Delta_\infty = \pi^*\Delta_!(1) = \Delta_!(1)$ であるから，(2.2) を用いて

$$\Delta_!(1) = \sum_{i<j} a_{ij}(x_i \times x_j + x_j \times x_i)$$

となる。これで 1) と 2) が証明された。

次に，通常のコホモロジーで $d_!(1)$ に対して行う議論と同様にして（例えば [Milnor] 参照），$\Delta_! : \mathcal{N}^*(M) \to \mathcal{N}^*(M \times M)$

に対し

$$p_{1!}(\Delta_!(1) \cup p_2^{*} T^{*}(x)) = x, \quad \forall x \in \mathfrak{N}^{*}(M),$$

が成立つことがいえる。これを basis $x_1, \cdots, x_\ell$ を使って書けば 3) を得る。ここで $p_1, p_2 : M \times M \longrightarrow M$ はそれぞれ才一,才二因子への射影である。

文献

[Conner-Floyd], Differentiable Periodic Maps, Springer, 1964

[tom Dieck], Lokalisierung äquivarianter Kohomologie-Theorien, Math. Zeit. 121 (1971), 253-262

[Milnor], Lectures on Characteristic Classes, Princeton, 1958

[中岡 I], Continuous maps of manifolds with involution I, to appear in Osaka J. Math.

[中岡 II], Continuous maps of manifolds with involution II, to appear in Osaka J. Math.