数理解析研究所講究録
第205巻 1974年 28-38

wave front set の有限伝播について

京大 数理研　西和田 公正

§1 序

偏微分方程式の解の種々の状態の有限伝播性を調べるのには、多くの方法があると思うが、ここでは F. John[3] に従がって、次のような方法をとる。即ち R^{n+1} を帯状領域

$$\Omega = \{ (t, x) \in R^{n+1} ; \quad a < t < b \}$$

で区切ってみて、そこで解が"ある状態"である点全体が有界である場合には、作用素がどのような形をしていなければならないかを調べることである。Ω の中で有界であることは、解のその状態が有限伝播していると解釈するわけである。

さて解の support の有限伝播性についての、F. John に端緒をもつ研究は一般 system の場合も含めて S. Matsuura によって完全に解決された。それ故、ここでは解の wave front set について上記の考察をしてみる。

$u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ に対して、$WF(u)$ の特徴付けは種々あるがそのうち一番簡単なのはよく知られている次の定義である。
(Hörmander [2])

<u>定義1</u>　$u\in\mathcal{D}'(\Omega)$，$((t_0,x_0),(\lambda_0,\xi_0))\in T^*(\Omega)\setminus 0$
に対して、$((t_0,x_0),(\lambda_0,\xi_0))\notin WF(u)$ とは、ある $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$
$\phi(t_0,x_0)\neq 0$，とある (λ_0,ξ_0) の conical nbd $\Gamma\subset R^{n+1}\setminus 0$
が存在し

$$(1.1)\qquad |\widehat{\phi u}(\lambda,\xi)|\le C_N(1+|\lambda|+|\xi|)^{-N},\quad N=1,2,\dots,\ (\lambda,\xi)\in\Gamma$$

が成立つことである。

$$\pi : T^*(\Omega)\setminus 0 \xrightarrow{\text{proj.}} \Omega$$ とすると、
$\pi WF(u)=\text{sing supp}\, u$ であるから $WF(u)$ は
sing supp u の拡張概念である。

更に伝播現象を考える時は、次のように時空間を強調しておくと便利である。

<u>定義2</u>　$u\in\mathcal{D}'(\Omega)$，$\eta\in R^n\setminus 0$

$$(1.2)\qquad WF_\eta(u)=\{(t,x)\in\Omega\ ;\ ((t,x),(\lambda,a\eta))\in WF(u)\ \text{for some}\ (\lambda,a)\in R^2\setminus 0\}$$

明らかに

$$(1.3)\qquad \text{sing supp}\, u=\bigcup_{\eta\in R^n\setminus 0} WF_\eta(u)$$

であることに注意する。

§2 主定理と若干の例

問題は大域的であるので、次の形をした定数係数作用素だけを考える。

(2.1) $$P(D_t, D_x) = D_t^{\ell} + \sum_{i<\ell} a_{i,\alpha} D_t^i D_x^{\alpha}$$

$$D = (D_t, D_x) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

<u>定理</u> $P(D)u = f \qquad u, f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

ある $\eta \in R^n \setminus 0$ と、η の conical nbd $\Gamma \subset R^n \setminus 0$ が存在し次の諸条件をみたすとする。

(i) $WF_\eta(u)$ が有界

(ii) $WF_\eta(f) = \emptyset$

(iii) $\mathrm{Im}\,\lambda \to \infty$ when $P(\lambda, \xi) = 0$, $\Gamma \ni \xi \to \infty$.

この時、$WF_\eta(u) = \emptyset$ である。

(1.3) より次の系が従がう。

<u>系</u> $P(D)u = f \quad , \quad f \in C^\infty(\Omega)$

(i) sing supp u は Ω で有界

(ii) $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$ when $P(\lambda, \xi) = 0$, $R^n \ni \xi \to \infty$,

この時、$u \in C^\infty(\Omega)$ である。

この系はJohnの定理([3])と形が似ているために、(ii)(系の)の代わりに「Pのどの既約因子もweakly hyperbolic でない。(乃至 C hyperbolic でない。)」という条件を置いたらどうかという疑問が生じる。しかし反例がある。R^3 で

$$P(\lambda, \xi) = \lambda^2 - \xi_1^2 + \xi_2^{2m}, \quad m \geq 1,$$

を考える。Pは既約で、weakly hyperbolic でも C hyperbolic でもない。(時間軸方向は(1.0.0))この時 $\vartheta^0 = (1, 1, 0)$ とし、ϑ^0 方向の P の localization を考える。

$$s^{-1}P(\cancel{s} \, s\vartheta^0 + (\lambda, \xi)) = P_{\vartheta^0}(\lambda, \xi) + O(s^{-1}) \quad s \to \infty$$

ならば $P_{\vartheta^0}(\lambda, \xi) = 2(\lambda - \xi_1)$ である。そこで R^3 の平面 $H : t - x_1 = 0$ の原点に於ける Dirac 測度を $\hat{\delta}$ とおき、R^3 の超函数 $u_N = (t - x_1)^N \hat{\delta}$ を作る。原点を通りHに垂直な直線をFとする。この時 u_N は次の諸式をみたす。

$$\mathrm{supp}\, P_{\nu^0}(D)^k u_N = F \ , \quad k \le N$$

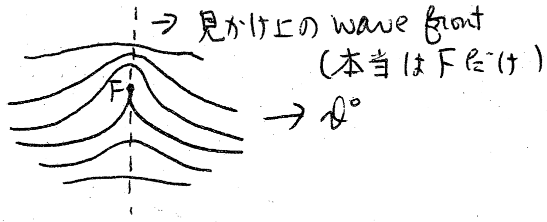
$$P_{\nu^0}(D)^{N+1} u_N = 0 \ ,$$

この条件は Hörmander [1] の Th 3.1 の前提条件をみたすので、ある $U \in \mathcal{D}'(R^3)$ が存在し

$$P(D)U \in C^\infty(R^3)$$

$$\mathrm{sing\,supp}\, U = F$$

である。従がって U を Ω に制限した時、sing supp U は実際に存在し Ω の中で有界である。更に定理より
$\bigcup_{\eta_1^2 < \eta_2^{2m}} WF_\eta(U) = \emptyset$ がいえる。しかし $m=1$ の時には U の wave front はもっと狭められるはずである。このことは [1] の Th 3.1 の証明をより細かくすることによって得られるだろう。$U = \mathrm{const}$ の曲面群は図のような場合が考えられる。



($t = \mathrm{const}$ で切った所)

次に系の(ii) をみたす例を考える。まず、すべての hypoelliptic op. が考えられる。non-hypoelliptic な例としては、例えば $\lambda^2 + \xi_1^2 + \xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^2$ などがある。hypoelliptic 多項式の各変数の最高次の項は、他の変数から独立である。

§3 定理の証明の概要

Pが(2.1)のように書けることは、或る$\varepsilon>0$と$0<\rho\le 1$に対して$K=\{(\lambda,\xi)\ ;\ |\xi|\le\varepsilon|\lambda|^{\rho}\}$とした時、

$$(3.1)\quad \left|\frac{P^{(i,\alpha)}(\lambda,\xi)}{P(\lambda,\xi)}\right|\le C(1+|\lambda|+|\xi|)^{-i-\rho|\alpha|}$$

$$|\lambda| \text{ large} \qquad (\lambda,\xi)\in K$$

を意味している。--方次の補題が成り立つ。

<u>補題</u>　$P(D)u=f$, $u,f\in\mathcal{D}'(\Omega)$。 Pはある Kに対して(3.1)をみたす。 fはある$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$に対して

$$(3.2)\quad |\widehat{(D^\alpha\varphi)f}(\lambda,\xi)|\le C_{N,\alpha}(1+|\lambda|+|\xi|)^{-N},\ N=1,2,\cdots,$$
$$(\lambda,\xi)\in K$$

この時、同じφに対して

$$|\widehat{\varphi u}(\lambda,\xi)|\le C'_N(1+|\lambda|+|\xi|)^{-N},\ N=1,2,\cdots.$$
$$(\lambda,\xi)\in K$$

fは定理の仮定より$WF_\eta(f)=\emptyset$であるから、特に$((t,x),(\pm 1,0))\notin WF(f)$である。これより(Kの$\varepsilon$を十分小さくとれば)$\varphi$, fは(3.2)をみたす。従ってuについての或る種の partial regularity が言えたこ

となる。

(補題の証明の概略)

$$ {}^{t}P(D)v = \varphi e^{-i(t\lambda + x\xi)} $$

の近似解

$$ v_N = w_N e^{-i(t\lambda + x\xi)} / P(\lambda, \xi) $$

$$ w_N = \sum_{0}^{N} R(\lambda, \xi, D)^{k} \varphi $$

$$ R(\lambda, \xi, D) = -\sum_{(i,\alpha)\neq 0} \left(P^{(i,\alpha)}(\lambda, \xi) D^{(i,\alpha)} / i!\alpha!\, P(\lambda, \xi) \right) $$

を求め、

$$ \widehat{\varphi u}(\lambda, \xi) = \langle u, \varphi e^{-i(t\lambda + x\xi)} \rangle_{t,x} $$

$$ = \langle f, v_N \rangle_{t,x} + \langle u, (R(\lambda, \xi, D)^{N+1}\varphi) e^{-i(t\lambda + x\xi)} \rangle_{t,x} $$

を評価する。

(定理の証明)

仮定より、$WF_\eta(u)$ は有界であるから、$WF_\eta(u)$ を包みこむように u を cutt-off することにより、supp u は(従がって supp f も)有界と仮定してよい。そこで

$$ P(D_t, D_x) u = f $$

を空間方向に Fourier 変換し

$$(3.3)\quad P(D_t,\xi)\hat{u}(t,\xi)=\hat{f}(t,\xi)$$

を得る。まず $\hat{u}$, $\hat{f}$ の $\xi\to\infty$ に関する order を t ついて一様におさえることを考える。
簡単のため $\Omega=\{(t,x)\ ;\ -2<t<2\}$ とし, $-1\le t\le 1$ に於ての 上記のことを考える。

$\phi(t)\in C^\infty((-2,2))$, $\phi=1$ on $[-1,1]$ をとると

$$(3.4)\quad \begin{aligned} D_t^k\hat{u}(t,\xi) &= D_t^k\widehat{\phi u}(t,\xi), \qquad -1\le t\le 1 \\ &= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^k\widehat{\phi u}(\lambda,\xi)e^{i\lambda t}d\lambda . \end{aligned}$$

一方 supp u の有界性と補題より

$$|\widehat{\phi u}(\lambda,\xi)|\le\begin{cases} C_N(1+|\lambda|+|\xi|)^{-N} & ;\ |\xi|\le\varepsilon|\lambda|^\rho \\ C(1+|\lambda|+|\xi|)^M & ;\ \text{otherwise} . \end{cases}$$

これを用いて (3.4) を評価すると、別の C と M で

$$(3.5)\quad \begin{aligned} |D_t^k\hat{u}(t,\xi)| &\le (2\pi)^{-1}\left|\int_{|\lambda|\le(|\xi|/\varepsilon)^{1/\rho}}+\int_{|\lambda|\ge(|\xi|/\varepsilon)^{1/\rho}}\right| \\ &\le C(1+|\xi|)^M, \quad -1\le t\le 1 . \end{aligned}$$

fについても同じϕをとると、$WF_\eta(f)=\emptyset$ より、或るηの conical nbd Γ が存在し、

$$|\widehat{\phi f}(\lambda\xi)| \le C_N(1+|\lambda|+|\xi|)^{-N},\ N=1,2,\ldots,\ \xi\in\Gamma.$$

これより (3.4), (3.5) と同様の計算で

(3.6) $$|\hat{f}(t,\xi)| \le C_N(1+|\xi|)^{-N},\ N=1,2,\ldots,\ \xi\in\Gamma$$

を得る。このΓは定理の条件(iii)のΓと同じとしても一般性を失なわない。$P(\lambda,\xi)=0$ の根を $\lambda_1(\xi),\cdots,\lambda_\ell(\xi)$ とし (3.3) を分解する。

(3.7) $$(D_t-\lambda_1(\xi))\cdots(D_t-\lambda_\ell(\xi))\hat{u}(t,\xi)=\hat{f}(t,\xi)$$

また、$$w_1(t,\xi)=(D_t-\lambda_2(\xi))\cdots(D_t-\lambda_\ell(\xi))\hat{u}(t,\xi)$$

とおく。一方

(3.8) $$C_1|\xi|^{\delta_1}\le|\mathrm{Im}\,\lambda_j(\xi)|,\quad |\lambda_j(\xi)|\le C_2|\xi|^{\delta_2},$$
$$\xi\in\Gamma,\quad 1\le j\le\ell,\quad |\xi|\ \text{large}$$

左の不等式は定理の(iii)より、右は多項式の根を係数で評価することから導かれる。(3.5) と (3.8) より、別のCとMで、

$$(3.9)\qquad |w_1(t,\xi)| \le C(1+|\xi|)^M,\quad -1\le t\le 1,$$

これに注意しつつ

$$(3.10)\qquad (D_t-\lambda_1(\xi))\,w_1(t,\xi) = \hat{f}(t,\xi)$$

をとくと

$$w_1(t,\xi) = e^{-i(s-t)\lambda_1(\xi)}w_1(s,\xi)$$
$$+\frac{1}{i}\int_t^s e^{-i(t'-t)\lambda_1(\xi)}\hat{f}(t',\xi)\,dt' \quad 。$$

$-\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2}$, $-1\le s\le 1$, の範囲で $|\mathrm{Im}\,(s-t)\lambda_1(\xi)|$ $=-\frac{1}{2}|\lambda_1(\xi)|$ となるように s を選ぶ. 故に (3.6), (3.8), (3.9) より $\xi\in\Gamma$ の時

$$|w_1(t,\xi)| \le e^{-\frac{\varepsilon_1}{2}|\xi|^{\delta_1}} + \sup_{-1\le t\le 1}|\hat{f}(t,\xi)|$$
$$\le C_N(1+|\xi|)^{-N},\quad N=1,2,\cdots,\quad -\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2}$$

そこで (3.7) に於て, 今と同様な推論を $w_2, w_3, \cdots, \hat{u}$ に適用すると, t の 0 の近傍が定まり, そこで一様に

$$(3.11)\qquad |\hat{u}(t,\xi)| \le C_N(1+|\xi|)^{-N},\quad N=1,2,\cdots,\ \xi\in\Gamma$$

この事実は, t の他の点の近傍についても差別は無いはずだから, (3.11) は $-1\le t\le 1$ で正しい。

このことより $\widehat{\phi u}(\lambda, \xi)$, $\phi \in C_0^\infty((-1, 1))$, の (λ, ξ), $\xi \in \Gamma$, についての急減少を示すことは容易である。なぜなら補題より $|\xi| \geq \varepsilon |\lambda|^\rho$ の時だけ示せばよいからである。従がって $WF_\eta(u) = \emptyset$ を得る。

参考文献

1. L. Hörmander, On the Singularities of Solutions of Partial Differential Equations, CPAM 23 (1970), 329〜358
2. L. Hörmander, Fourier Integral Operators. I, Acta Math 127 (1971) 79〜183
3. F. John, Non-admissible data for Differential Equations with Constant Coefficients CPAM 10 (1957) 391〜398
4. M. Kashiwara, On C-hyperbolic Differential Operators with Constant Coefficients, 数理解析研究所講究録 145 (1972), 168〜171