数理解析研究所講究録
第205巻 1974年 74-86

一階偏微分作用素の parametrix について

阪大 理　　赤松 豊博

§0　序

$L = \frac{\partial}{\partial t} + i\varphi(x)\sigma(t)\frac{\partial}{\partial x}$ を、開集合 $\Omega = (a,b)\times(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}^1_x \times \mathbb{R}^1_t$ $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$、$-\infty \leqq \alpha < 0 < \beta \leqq +\infty$ で定義された二変数一階偏微分作用素とする。L に対する或る弱い意味でのパラメトリクスを、次の二つの仮定の下で構成し、方程式

(0-1)・・・ $Lu = f$ in Ω の解の評価を調べる。

〈仮定〉

(0-2)・・・ $\varphi \in C^\infty((a,b))$。$\varphi$ の全ての階数の微分係数は有界

(0-3)・・・ $\sigma \in C^\infty((\alpha,\beta))$。$\sigma(t) \geqq 0$ in (α,β)。σ の零点次数は全て有限。

方程式 (0-1) は、仮定 (0-2) (0-3) の下で、Ω に於て局所可解である。(Cf. [1] [5])。しかし必ずしも hypoelliptic であるとは、一般には言えない。(Cf. [7])。

方程式 (0-1) の解として次の形のものを考える。

$$(0\text{-}4) \cdots u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\xi \int_0^t \sigma(s)ds\right) v(x,\xi)\, d\xi$$

形式的に計算して、次式を得る。

$$(0\text{-}5) \cdots Lu = \frac{\sigma(t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\xi\int_0^t \sigma(s)ds\right)\left(\xi v(x,\xi) + \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x} v(x,\xi)\right) d\xi$$

$g \in C_0^\infty((\alpha;\beta))$ が、$g = 0$ near $\{t \mid \sigma(t) = 0\}$ である時、

$$(0\text{-}6) \cdots g(t) = \frac{\sigma(t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\xi\int_0^t \sigma(s)ds\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i\xi\int_0^{t'}\sigma(s)ds\right) g(t')dt'\right) d\xi$$

である事に注意すれば、方程式

$$(0\text{-}7) \cdots \xi v(x,\xi) + \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x} v(x,\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i\xi\int_0^{t'}\sigma(s)ds\right) f(x,t')dt'$$

の解を、(0-4)に代入した時、u が (0-1) の解を与える事が予想出来る。

§1 予備定理

§0 に述べた事を正当化し、parametrix を構成する為の予備定理を述べる。

Lemma 1-1

φ は (0-2) を満足するとする。ξ を実パラメーターと見て、次の方程式を考える。

$$(1\text{-}1) \cdots \xi v(x) + \varphi(x)\frac{d}{dx} v(x) = f(x) \quad in\ (a,b)$$

この時、任意の自然数 j に対して適当な定数 C_j が存在し、次の事が成立する。即ち、$|\xi| > C_j$ に対し、linear mapping S_ξ ; $C_0^{j+1}((a,b)) \longrightarrow C^j((a,b))$ で、次の性質を持つものが存在する。

(1-2) ··· $\xi S_\xi f + \varphi \frac{d}{dx} S_\xi f = f \quad \text{in } (a,b)$

(1-3) ··· $\varphi \frac{d}{dx} S_\xi f = S_\xi\left(\varphi \frac{d}{dx} f\right)$

(1-4) ··· $S_\xi f(x)$ を、(x,ξ)の関数と見る時、$\frac{\partial^p}{\partial x^p} S_\xi f$ は $(a,b)\times\{\xi \mid |\xi|>C_j\}$ で存在し連続、更にξに関し無限回連続可微分。(但し $0\leq p\leq j$)。

Cをfに無関係な定数として次の不等式が成立。

(1-4-1) ··· $\left|\frac{\partial^N}{\partial\xi^N}\frac{\partial^p}{\partial x^p} S_\xi f\right| \leq C(1+|\xi|)^{-N-1} \sup_{a<x<b} \sum_{0\leq l\leq p} \left|\frac{d^l}{dx^l} f(x)\right|$

(1-4-2) ··· $\int_a^b \left|\frac{\partial^N}{\partial\xi^N}\frac{\partial^p}{\partial x^p} S_\xi f\right|^2 dx \leq C(1+|\xi|)^{-2(N+1)} \int_a^b \sum_{0\leq l\leq p} \left|\frac{d^l}{dx^l} f(x)\right|^2 dx$

但し、$|\xi|\geq C_j$、$f\in C_0^{j+1}((a,b))$、$0\leq p\leq j$

証明は省くが、$S_\xi f$の表現を与える。

$N=\{a<x<b \mid \varphi(x)=0\}$と置き、$(a,b)\setminus N$を、開区間$(a_\mu, b_\mu)_{\mu\in\Lambda}$のdisjoint unionとして表わす。

$S_\xi f$を次式で定義する。

(1-5) ··· $$S_\xi f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\xi} f(x) & (x\in N) \\ \int_{a_\mu}^x \exp\left(\xi\int_x^y \frac{1}{\varphi(s)}ds\right)\frac{1}{\varphi(y)} f(y)\,dy & \left(\begin{array}{l} x\in(a_\mu,b_\mu) \\ \varphi,\ \xi\ \text{同符号} \end{array}\right) \\ -\int_x^{b_\mu} \exp\left(\xi\int_x^y \frac{1}{\varphi(s)}ds\right)\frac{1}{\varphi(y)} f(y)\,dy & \left(\begin{array}{l} x\in(a_\mu,b_\mu) \\ \varphi,\ \xi\ \text{異符号} \end{array}\right) \end{cases}$$

以後、$S_\xi f(x)$を、$Sf(x,\xi)$と書く事にする。

次の補題を述べる前に記号を導入する。

$$(1\text{-}6)\cdots\quad Tf(\xi)=\int_\alpha^\beta \exp\left(-i\xi\int_0^t \sigma(s)ds\right) f(t)\,dt \qquad f\in L^1((\alpha,\beta))$$

$$(1\text{-}7)\cdots\quad \tilde{T}g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\xi\int_0^t \sigma(s)ds\right) g(\xi)\,d\xi \qquad \alpha<t<\beta,\quad g\in L^1(\mathbb{R}^1_\xi)$$

<u>Lemma 1-2</u>

K を (α,β) 内の任意の compact set、k を K に於ける σ の零点の最大次数とする。

i) $\cdots$ $r\geqq 0$、$\chi\in C_0^\infty(K)$ に対し、定数 C が存在して、

$$(1\text{-}8)\cdots\quad \|\chi\tilde{T}g\|_r^2\leqq C\int(1+|\xi|^2)^{r+\frac{k}{2(k+1)}}|g(\xi)|^2d\xi \qquad g\in L^1(\mathbb{R}^1_\xi)$$

ii) $\cdots$ $s\geqq\frac{k}{2(k+1)}$ なる s に対し、定数 C が存在して、

$$(1\text{-}9)\cdots\quad \int(1+|\xi|^2)^{-s}|Tf(\xi)|^2d\xi\leqq C\|f\|^2_{-s+\frac{k}{2(k+1)}} \qquad f\in L^1((\alpha,\beta)),\ \mathrm{supp}\, f\subset K$$

iii) $\cdots$ 定数 C が存在して、

$$(1\text{-}10)\cdots\quad |Tf(\xi)|\leqq C(1+|\xi|)^{-\frac{1}{k+1}}\sup_{\alpha<t<\beta}(|f(t)|+|f'(t)|) \qquad f\in C_0^1((\alpha,\beta)),\ \mathrm{supp}\, f\subset K,\ |\xi|\geqq 1$$

但し i) ii) に於て、$\|\ \|$ は Sobolev norm、右辺は $+\infty$ を許す。

i) ii) の証明の概略を述べる。

i)　$0\le\overset{\gamma}{s}<1$ の場合に、$g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_t)$ に対して証明すれば良い。$\delta>0$ とし、$\tilde{\chi}(\tau)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_\tau)$ を $|\tau|\le\delta$ で 1、$|\tau|\ge 2\delta$ で 0 である関数とする。K に於ける σ の zero 点を $\{t_i\}_{1\le i\le N}$ とする。

$\chi_i(t)=\tilde{\chi}\left(\int_{t_i}^{t}\sigma(s)ds\right)$ と置く。

$$(1\text{-}11)\quad\cdots\quad \chi\tilde{T}g=\sum_{1\le i\le N}\chi\chi_i\tilde{T}g+\chi\Big(1-\sum_{1\le i\le N}\chi_i\Big)\tilde{T}g$$

δ を十分小さく取れば、$\mathrm{supp}\,\chi(1-\sum_{1\le i\le N}\chi_i)$ 上 $\sigma\ne 0$ 故、変数変換 $\tau=\int_0^t\sigma(s)ds$ を考えれば、(1-11) 右辺第二項に対し (1-8) が成立。従って $\chi_i\tilde{T}g$ $(1\le i\le N)$ に対して i) を証明すれば良い。δ を十分小さく取り、σ を $\mathrm{supp}\,\chi_i$ の外で適当に修正し、σ の zero 点は t_i のみであるとして良い。

次の事に注意する。

(イ) $0<\tilde{s}<1$ の時、$v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_x)$ に対し、

$$\|v\|_{\tilde{s}}^2\le\int|v(x)|^2dx+A_{\tilde{s}}\iint|v(x)-v(y)|^2|x-y|^{-2\tilde{s}-n}dxdy\le 2\|v\|_{\tilde{s}}^2$$

但し、$A_{\tilde{s}}>0$ は、$\tilde{s}$ のみに依存する定数

(cf. Hörmander[2] Lemma 2.6.1)

(ロ) $0<\alpha<1$ に対し、定数 C_α が存在して、

$$\int|v(x)|^2\frac{1}{|x|^\alpha}dx\le C_\alpha\int|\xi|^\alpha|\hat{v}(\xi)|^2d\xi\qquad v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_x)$$

この時 i) は、$\overset{\gamma}{s}=0$ の場合、変数変換 $\tau=\int_{t_i}^{t}\sigma(s)ds$ を行い、(ロ) を用いれば証明出来る。

$0<\overset{\gamma}{s}<1$ の場合は、(イ) に於て、$x=t$、$y=t'$、と置き、(t,t') 空間での積分領域を、次の様に分割する。$\varepsilon>0$ として、

$R_1=\{(t,t')\mid |t|\leq\varepsilon,\ |t'|\leq\varepsilon\}$、$R_2=\{(t,t')\mid |t|\geqq\varepsilon,\ |t'|\leq\varepsilon\}$、

$R_3=\{(t,t')\mid |t|\leq\varepsilon,\ |t'|\geqq\varepsilon\}$、$R_4=\{(t,t')\mid |t|\geqq\varepsilon,\ |t'|\geqq\varepsilon\}$。

$\varepsilon>0$を適当に小さく取り、(イ)及び、変数変換 $\tau=\int_{t_i}^{t}\alpha(s)ds$ を行えば、$0<\overset{r}{\delta}<1$ の場合に証明出来る。

ii) の証明は i) の duality によって出来る。

§2　Parametrix の構成

先ず記号を導入する。

$H_{r,s}=\left\{ f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1_x\times\mathbb{R}^1_t)\ \middle|\ \|f\|^2_{r,s}=\iint(1+|\xi|^2)^r(1+|\tau|^2)^s|\hat{f}(\xi,\tau)|^2d\xi d\tau<+\infty\right\}$

$H^{loc}_{r,s}(\Omega)=\{f\in\mathcal{D}'(\Omega)\mid \omega f\in H_{r,s}\ \text{for}\ \forall\,\omega\in C_0^\infty(\Omega)\}$

$\overset{\circ}{H}_{r,s}(\Omega)=\mathcal{E}'(\Omega)\cap H_{r,s}$

$\overset{\circ}{H}_{r,s,K}(\Omega)=\{f\in\overset{\circ}{H}_{r,s}(\Omega)\mid \text{supp}\,f$ の t 方向の射影 $\subset K\Subset(\alpha,\beta)\}$

　但し、r、s は任意の実数、Kは(α,β)内の compact set

<u>Theorem 2-1</u>

L、Ωを§0に於けるものとし、(0-2)(0-3)を仮定する。

この時、任意の自然数jに対し、linear mapping E_j、R_j、R'_j、で以下の性質(2-1)―(2-7)を持つものが存在する

(2-1) ・・・ $E_j:\overset{\circ}{H}_{0,0}(\Omega)\longrightarrow H^{loc}_{0,0}(\Omega)$

(2-2) ・・・ $R_j:\overset{\circ}{H}_{r,s}(\Omega)\longrightarrow H^{loc}_{r,\tilde{s}}(\Omega)$

(2-3) ・・・ $R'_j:\overset{\circ}{H}_{r,s}(\Omega)\longrightarrow H^{loc}_{r,\tilde{s}}(\Omega)$

$r, s, \tilde{s}$ は任意の実数

(2-4) $\cdots$ $LE_j f = f + R_j f$ in Ω for $\forall f \in H^{\circ}_{0,0}(\Omega)$

(2-5) $\cdots$ $E_j L f = f + R_j' f$ in Ω for $\forall f \in H^{\circ}_{0,0}(\Omega)$ s.t $Lf \in H^{\circ}_{0,0}(\Omega)$

(2-6) $\cdots$ $\forall \omega \in C_0^\infty(\Omega)$を取り、$l_\omega$を、$\mathrm{supp}\,\omega$の$t$方向への射影に於ける$\sigma$のzero点の最大次数とする。

$\forall K$ compact set in (α,β)に対し、l_KをKに於けるσのzero点の最大次数とする。

$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l_\omega+1} + \frac{1}{l_K+1}\right)$ と置く。この時、$0 \leq \forall p \leq j$に対し、定数C（fに無関係）が存在し、次の不等式が成立する。

$\|\omega \frac{\partial^p}{\partial x^p} E_j f\|_{0,0} \leq C \|f\|_{p,-\delta}$ for $\forall f \in H^{\circ}_{p,0,K}(\Omega)$

(2-7) $\cdots$ K及びωを、(2-6)に於けるものとする。fに無関係な定数Cが存在して、次の不等式が成立する。

$\|\omega R_j f\|_{r,\tilde{s}} \leq C \|f\|_{r,s}$

$\|\omega R_j' f\|_{r,\tilde{s}} \leq C \|f\|_{r,s}$

但し、$f \in H^{\circ}_{r,s,K}(\Omega)$、$r$, s, $\tilde{s}$は任意の実数。

(proof)

$f \in C_0^\infty(\Omega)$に対して、E_j, R_j, R_j'を定義する。一般な場合への拡張は、mollifierによる近似を用いれば良い。

$\chi_j(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_\xi)$を、$\chi_j(\xi) = 0$ for $|\xi| \leq 2C_j+1$、$\chi_j(\xi) = 1$ for $|\xi| \geq 3C_j+1$ なる関数とする。ここで定数C_jは、Lemma 1-1

に於て定められたものである。以後証明中に於て、suffix q を省く事にする。

operators U、E を次式で定義する。

$$(2\text{-}8)\ \cdots\ Uf(x,\xi) = \chi(\xi)\, S\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i\xi\int_0^{t'}\sigma(s)ds\right) f(\cdot,t')\,dt'\right)(x,\xi)$$

$$(2\text{-}9)\ \cdots\ Ef(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\xi\int_0^{t}\sigma(s)ds\right) Uf(x,\xi)\,d\xi$$

Lemma 1-1 (1-4-1) 及び、Lemma 1-2 (1-10) より (2-9) は、well defined であり、Ef は、x に関し q 回まで連続可微分である事がわかる。更に次式が成立する。

$$(2\text{-}10)\ \cdots\ \frac{\partial^p}{\partial x^p} Ef(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int \exp\left(i\xi\int_0^{t}\sigma(s)ds\right) \frac{\partial^p}{\partial x^p} Uf(x,\xi)\,d\xi \qquad (0\le p\le q)$$

(2-10)に対し、Lemma 1-2 (1-8)、Lemma 1-1 (1-4-2)、及び Lemma 1-2 (1-9) を順次適用すれば、$f\in C_0^\infty(\Omega)$ に対し、(2-6) が成立する。他方 f が σ の zero 点の近傍で zero である場合、Ef は、t に関しても連続可微分かつ微分と積分の順序交換可能であり、Lemma 1-1 (1-2) 及び Fourier 反転公式を用いて次式を得る。

$$(2\text{-}11)\ \cdots\ LEf(x,t) = f(x,t) + \frac{\sigma(t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\xi\int_{t'}^{t}\sigma(s)ds\right)(\chi(\xi)-1)\, f(x,t')\,dt'\,d\xi$$

一般の $f\in C_0^\infty(\Omega)$ に対しては、f を σ の zero 点の近傍で 0 と

なり更に Ω 内の共通の compact set 内に support を持つ $C_0^\infty(\Omega)$ 関数で L^2 近似すれば、$f\in C_0^\infty(\Omega)$ に対して (2-6) が成立する事より、やはり (2-11) が成立する事が分る。

ここで、R 及び R' を次の様に定義する。

$$(2\text{-}12)\ \cdots\ Rf(x,t)=\frac{\sigma(t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\xi\int_{t'}^{t}\sigma(s)\,ds\right)(\chi(\xi)-1)\,f(x,t')\,dt'\,d\xi$$

$$(2\text{-}13)\ \cdots\ R'f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\xi\int_{t'}^{t}\sigma(s)\,ds\right)(\chi(\xi)-1)\,\sigma(t')f(x,t')\,dt'\,d\xi$$

この時、(2-4) が $f\in C_0^\infty(\Omega)$ に対し成立する。(2-5) も同様にすれば、$f\in C_0^\infty(\Omega)$ に対する成立を得る。

(2-7) の不等式は、(2-12)、(2-13) より容易に出る。 (q.e.d)

§3 L^2-評価

<u>Lemma 3-1</u>

E_j を、Theorem 2-1 で構成された parametrix とする。

$0\le p\le j$ に対し、$(\varphi\frac{\partial}{\partial x})^p f\in H^0_{0,0}(\Omega)$ である様な $f\in H^0_{0,0}(\Omega)$ に対して、次の等式が成立する。但し、そこで、$\sigma_{p,k}$、$\sigma_{p,\ell,m}$ は、j に無関係な $C^\infty((\alpha,\beta))$ に属する関数である。

$$(3\text{-}1)\ \cdots\ \frac{\partial^p}{\partial t^p}E_j f=\sum_{k=1}^{p}\sigma_{p,k}(t)\,E_j\left(\varphi\frac{\partial}{\partial x}\right)^k f+\sum_{0\le \ell+m\le p-1}\sigma_{p,\ell,m}(t)\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}\left(\varphi\frac{\partial}{\partial x}\right)^m(f+R_j f)$$

(proof)

Lemma 1-1 (1-3) 及び Th 2-1 (2-4) を用いれば、帰納的 (p に関して)

に証明出来る。 (q.e.d)

Lemma 3-2

E_jを、Lemma 3-1 に於けるものとする。ω, $\tilde{\omega} \in C_0^\infty(\Omega)$を、$\omega = 0$ near supp$\tilde{\omega}$ なる関数とする。$0 \leq p \leq j$ なる整数を固定する。この時、任意の非負整数 q に対し、次の事が言える $f \in H_{p,0}^{loc}(\Omega) \Longrightarrow \tilde{\omega} E_j(\omega f) \in H_{p,q}$。更に、$f$ に無関係な定数 C が存在して、次の不等式が成立する。

$$(3\text{-}2) \cdots \|\tilde{\omega} E_j(\omega f)\|_{p,q} \leq C \|\omega f\|_{p,0} \quad f \in H_{p,0}^{loc}(\Omega)$$

証明略

Theorem 3-3

I, J を任意の非負整数とする。$u \in H_{I,0}^{loc}(\Omega)$ とし、更に、$0 \leq k \leq J$、$0 \leq l+m \leq J-1$ に対し、$(\varphi \frac{\partial}{\partial x})^k (Lu)$, $\frac{\partial^l}{\partial t^l}(\varphi \frac{\partial}{\partial x})^m (Lu) \in H_{I,0}^{loc}(\Omega)$ を仮定する。この時、$u \in H_{I,J}^{loc}(\Omega)$ であり、次の形の評価が成立する。

ω, $\tilde{\omega} \in C_0^\infty(\Omega)$ を、$\omega = 1$ near supp$\tilde{\omega}$ なる関数とし、l_ω, $l_{\tilde{\omega}}$ を、各々、suppω, supp$\tilde{\omega}$, の t-projection に於ける Γ の zero 点次数の最大値とする。$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l_\omega+1} + \frac{1}{l_{\tilde{\omega}}+1}\right)$ と置く。任意の正整数 N に対し、u に無関係な定数 C が存在し、次の不等式が成立する。但し、$f = Lu$ と置く。

$$(3\text{-}3) \cdots \|\tilde{\omega} u\|_{I,J} \leq C\Big(\sum_{0 \leq k \leq J} \|(\varphi \tfrac{\partial}{\partial x})^k (\omega f)\|_{I,-\delta} + \sum_{0 \leq l+m \leq J-1} \|(\varphi \tfrac{\partial}{\partial x})^m (\omega f)\|_{I,l} + \|(L\omega)u\|_{I,0} + \|\omega u\|_{I,-N}\Big)$$

(proof)

Th 2-1 (2-5) を、$f=I$ として適用すれば、次式を得る。

(3-4) … $\tilde{w}u = \tilde{w}E_I(wf) + \tilde{w}E_I((Lw)u) - \tilde{w}R_I'(wu)$

従って、(3-3)は、Th 2-1 (2-6)、(2-7) 及び、Lemma 3-1, Lemma 3-2 より従う。 (q.e.d)

参考文献

[1] R. Beals and C. Fefferman: On the solvability of linear partial differential equations with C^∞ coefficients to appear

[2] L. Hörmander: Linear Partial Differential Operators 1963

[3] L. Nirenberg and F. Treves: Solvability of a first order linear partial differential equation, Comm. Pure. Appl. Math. 16 (1963) 331-351

[4] ———————: On local solvability of linear partial differential equations, Part I: Necessary Conditions Comm. Pure. Appl. Math. 23 (1970) 1-38

[5] ———————: On local solvability of linear partial differential equations, Part II: Sufficient Conditions, Comm. Pure. Appl. Math 23 (1970) 459-510

[6] F. Treves: A new method of proof of the subelliptic estimates, Comm. Pure. Appl. Math 24 (1971) 71-115

[7] ——— : Hypoelliptic Partial differential equations of principal type, Sufficient conditions and necessary conditions, Comm. Pure. Appl. Math 24 (1971) 537–570

〈追 記〉

予稿集に於ける、Th 3-3 の $0<\delta<\frac{1}{2}(l_{\tilde{\omega}}+1)^{-1}$ を、$\delta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{l_{\omega+1}}+\frac{1}{l_{\tilde{\omega}+1}}\right)$ として良い事が分った。その為に Lemma ~~2~~ 1-2 の内容が変更されている。更に、Th 2-1 (2-6) に於いて、$0<{}^{\forall}\delta<\frac{1}{2}(1+l_{\omega})^{-1}$ の代りに、δ を、$\delta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{l_{\omega+1}}+\frac{1}{l_{k+1}}\right)$ と変更している。