数理解析研究所講究録
第 206 巻 1974 年 1-14

Uniform algebra と Bauer simplex について

阪大 基工　安西一夫

§1. 序

compact凸集合の structure に関する研究は，詳細になされている。それらの研究と関数環の研究とは，密接な関係がある。たとえば，関数環Aの state space $S(A)$ の closed face と generalized peak set との関係，facial topology による関数環の特徴づけなどが E. J. Ellis ([9]) によって述べられている。また，E. M. Alfsen と B. Hirsberg ([3]) は，dominated extention theorem を用いて，Bishop-Rudin-Caleson の定理の一般化をしている。§3 で，$C_R(X)$ の closed subspace に関する J. E. Bjork の定理の一般化である T. B. Andersen ([4]) の結果を紹介し，§4 で，Bauer simplex と関数環との関係を述べ，§5 で，関数環の tensor product について述べる。

§2. 定義

Kを局所凸空間のcompact凸集合とし，Kのextreme pointの集合を$\mathrm{ex}K$とする。Kを適当にaffine変換したものをK'とし，Pを$P=\{\lambda x \mid \lambda \geqq 0,\ x\in K'\}$とするとき，$P-P$が$P$の順序でvector束になるとき，$K$をsimplexという。simplexでかつ，$\mathrm{ex}K$が閉集合である$K$をBauer simplexという。$F$が$K$のfaceであるとは，$\lambda x+(1-\lambda)y\in F$となる$(\lambda, x, y)\in (0,1]\times K\times K$に対して，$x\in F$となることである。$F\cap F'=\phi$となる$K$のface F'が存在して，$x\in K$に対して，$x=\lambda y+(1-\lambda)z$となる$(\lambda, y, z)\in [0,1]\times F\times F'$が唯一つ存在するとき，$F$をsplit faceという。$x\in K$とするとき，$\mathrm{face}(x)$は$x$を含む最小のfaceである。$\alpha\geqq 1$に対して，

$D_\alpha(x)=(\alpha x-(\alpha-1)K)\cap K$とすると，$\mathrm{face}(x)=\bigcup_{\alpha\geqq 1} D_\alpha(x)$となる（[1]）。$x\approx y$であるとは，$\mathrm{face}(x)=\mathrm{face}(y)$となることである。このとき，$\approx$は$K$上の同値関係になる。$\mathrm{face}(x)$を$K$のpartという。$x\approx y$であることと

$\sup\{\,|\log \frac{u(x)}{u(y)}| : u\in \mathcal{A}(K),\ u>0\} <\infty$であることとは同値である。ただし，$\mathcal{A}(K)$は$K$上のaffine連続関数の集合とする（[6]）。$\mu$, νをK上の確率測度とするとき，$\nu>\mu$であるとは，凸連続関数fに対して，$\int f\,d\nu \geqq \int f\,d\mu$とな

ることである。この順序$>$に関して，μが極大であるとき，μを maximal measure という。K上の測度μが boundary measure であるとは，$\frac{|\mu|}{|\mu|(K)}$ が maximal measure となることである。$x \in K$ に対して，$f \in \mathcal{A}(K)$ ならば，$f(x)=\int f d\mu$ となる確率測度μが存在する。このμをxの representing measure といい，xをμの resultant という（[5]）。

定理（Choquet-Meyer）Kが simplex であることと，$x \in K$に対して，唯一つのxの maximal representing measure が存在することとは，同値である。

$f \in \mathcal{A}(K)$ ならば，$\int f d\mu = 0$ となるK上の測度μの集合を$\mathcal{A}(K)^{\perp}$で表わす。Xを compact Hausdorff 空間とし，$B(\subset C_{\mathbb{R}}(X))$を$X$上の function space とし，$\partial_B X$を$X$の Choquet 境界とする。$S(B)=\{f \in B^* \mid f(1)=1=\|f\|\}$を$B$の state space という。$\Phi$を$X$から$S(B)$への canonical map とし，$B$から$\mathcal{A}(S(B))$への写像$\Phi$を次のように定義する。$f \in B$，$x \in S(B)$に対して，$\Phi(f)(x)=\langle f, x\rangle$とする。$A$を$X$上の関数環とし，$A$の極大イデアル空間を$M(A)$とする。$A$が Dirichlet 環であるとは，$\mathrm{Re}A|_{\partial_A X}$が$C_{\mathbb{R}}(\partial_A X)$で稠密になることである。$\varphi$を$X$から$S(A)$への canonical map とし，$\overline{\mathrm{Re}A}$から$\mathcal{A}(S(A))$への写像$\psi$を次のように定義する。$f \in A$，$h=\mathrm{Re}f$，$x \in S(A)$ならば，$\psi(h)(x)=\mathrm{Re}\langle f, x\rangle$とする。

§3. dominated extention theorem について

この§で，T.B. Andersen による Bjørk の定理を拡張した結果（[4] 定理3）を紹介する。

定理1.（Andersen）compact 凸集合 K の closed split face を F とする。

$$b < g \qquad b|_F \leqq a_0 \leqq g|_F$$

をみたす K 上の実数値凹連続関数を g とし，$b \in \mathcal{A}(K)$, $a_0 \in \mathcal{A}(F)$ とするとき，

$$b \leqq a \leqq g \qquad a|_F = a_0$$

となる $a \in \mathcal{A}(K)$ が存在する。

この定理は，値域が approximation property をもつ Banach 空間の場合にも成立することを，T.B. Andersen は [5] で述べている。

命題2.（Andersen）K を compact 凸集合とし，F_0 を exK の閉部分集合とする。このとき，$\mu \in \mathcal{A}(K)^{\perp}$ となる boundary measure μ に対して，$\mu|_{F_0} \in \mathcal{A}(K)^{\perp}$ ならば，F_0 の閉凸包 $F = \overline{\mathrm{con}}[F_0]$ は split face になる。

上の命題は，E.M. Alfsen（[1]）による split face を測度により特性化した結果を使って証明している。次の定理は，X が距離空間でない場合の Bjørk の定理を証明している。

定理3.（Andersen）X を compact Hausdorff 空間とし

B を X の点を分離し，定数関数を含む，$C_{\mathbb{R}}(X)$ の閉部分空間とする。F_0 が

$$\mu \in M(\partial_B X) \cap B^{\perp} \quad ならば \quad \mu|_{F_0} \in B^{\perp}$$

をみたす B に関する Choquet 境界 $\partial_B X$ の compact 部分集合ならば，$b_0 \in B|_{F_0}$ に対して

$$b|_{F_0} = b_0 \quad \|b\|_X = \|b_0\|_{F_0}$$

となる $b \in B$ が存在する。

証明　最初に，$\Phi(F_0)$ の閉凸包 F が $S(B)$ の split face であることを示す。$\Phi(F_0) \subseteq ex\, S(B)$ より，命題2によって，$\mu \in \mathcal{A}(S(B))^{\perp}$ である boundary measure μ に対して，$\mu|_{\Phi(F_0)} \in \mathcal{A}(S(B))^{\perp}$ を示せばよい。もし，$b \in B$ ならば，

$$\int_X b\, d\mu\circ\Phi = \int_{\Phi(X)} b\circ\Phi^{-1} d\mu = \int_{\Phi(X)} \Phi(b)\, d\mu = \int_{S(B)} \Phi(b)\, d\mu = 0$$

よって，$\mu\circ\Phi \in B^{\perp}$。$\mu\circ\Phi \in M(\partial_B X)$ より，$\mu\circ\Phi|_{F_0} \in B^{\perp}$。もし $a \in \mathcal{A}(S(B))$ ならば，$\Phi^{-1}(a) \in B$ となる。ゆえに，

$$0 = \int_{F_0} \Phi^{-1}(a)\, d\mu\circ\Phi = \int_{\Phi(F_0)} \Phi^{-1}(a)\circ\Phi^{-1} d\mu = \int_{\Phi(F_0)} a\, d\mu。$$

よって，F は split face である。次に，$b_1|_{F_0} = b_0$ となる $b_1 \in B$ に対して，$\Phi(b_1) \in \mathcal{A}(S(B))$。定理1より，

$$c|_F = \Phi(b_1)|_F, \quad \|c\|_{S(B)} = \|\Phi(b_1)\|_F$$

となる $c \in \mathcal{A}(S(B))$ が存在する。$\|c\|_{S(B)} = \|c\|_{ex\,S(B)}$ より，

$$\|\Phi^{-1}(c)\|_X = \|c\|_{\Phi(X)} = \|c\|_{S(B)} = \|\Phi(b_1)\|_F = \|\Phi(b_1)\|_{\Phi(F_0)}$$
$$= \|b_1\circ\Phi^{-1}\|_{\Phi(F_0)} = \|b_1\|_{F_0}$$

$b = \Phi^{-1}(C)$ とおくとよい。

§4. Bauer simplex と Dirichlet 環

定理4. (Bauer) Kを compact 凸集合とする。このとき，Kが Bauer simplex であるための必要十分条件は，$\mathrm{ex}K$から$\mathbb{R}$への任意の連続関数fに対して，$\tilde{f}|_{\mathrm{ex}K} = f$ でかつ，$\|f\|_{\mathrm{ex}K} = \|\tilde{f}\|_K$ となる $\tilde{f} \in A(K)$ が存在することである。

この定理は，E.M. Alfsen ([2], Coro. 1) の結果を用いると次のように，容易に拡張できる。

命題A. Kを compact 凸集合とし，Eを完備な実局所凸空間とする。このとき，Kが Bauer simplex となる必要十分条件は，$\mathrm{ex}K$からEへの任意の連続写像fに対して，$\tilde{f}|_{\mathrm{ex}K} = f$ となる KからEへの連続な affine 写像$\tilde{f}$が存在することである。特に，Eが Banach 空間ならば，$\|f\|_{\mathrm{ex}K} = \|\tilde{f}\|_K$ となる。

証明 Kを Bauer simplex とする。このとき $\mathrm{ex}K$は，閉集合であることより，$f(\mathrm{ex}K)$は compact 集合となる。Eが完備であることより，$f(\mathrm{ex}K)$の閉凸包は compact 凸集合となる。Kが Bauer simplex であることより，定理4により，$\mu \in A(K)^{\perp}$ となる boundary measure μ は，$\mu = 0$ である。よって，[2] Coro 1. より，$\tilde{f}|_{\mathrm{ex}K} = f$ となる，Kから $\overline{\mathrm{con}}[f(\mathrm{ex}K)]$ への

affine連続写像$\tilde{f}$が存在する。Eが Banach 空間のとき，$\|f\|_{exK}=\|\tilde{f}\|_K$ となることはあきらかである。逆は，E の部分空間 $E_0=\{\lambda x \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$（ただし $x\neq 0, x\in E$）は $\mathbb{R}$ に位相同型より，定理4より，K は Bauer simplex となる。

R. Fuhr と R. R. Phelps は [9] Coro. 6.3で，次の命題の必要条件が成立することを示している。

命題B． A を compact Hausdorff 空間 X 上の関数環とする。このとき，A が Dirichlet 環である必要十分条件は，A の state space が Bauer simplex となることである。

証明　A が Dirichlet 環ならば，Choquet 境界 $\partial_A X$ は閉集合となる。$x\in K$ に対して，$\mathcal{A}(S(A))$ に関する x の maximal representing measure を μ_1, μ_2 とすると，

$$\mathrm{supp}(\mu_i)\subset\overline{ex\,S(A)}=ex\,S(A)=\varphi(\partial_A X)\quad(i=1,2)。$$

$\overline{Re\,A|_{\partial_A X}}=C_{\mathbb{R}}(\partial_A X)$ であることと，$\overline{\psi(Re\,A)}=\mathcal{A}(S(A))$ であることより，$\mathcal{A}(S(A))|_{ex\,S(A)}=C_{\mathbb{R}}(ex\,S(A))$。よって，$\mu_1=\mu_2$。Choquet-Meyer の定理より，K は simplex となる。逆は，$f\in C_{\mathbb{R}}(\partial_A X)$ に対して，$f\circ\varphi^{-1}\in C_{\mathbb{R}}(ex\,S(A))$。定理4より，$h|_{ex\,S(A)}=f\circ\varphi^{-1}$ となる $h\in\mathcal{A}(S(A))$ が存在する。よって，$\psi^{-1}(h)\in\overline{Re\,A}$ となり，A は Dirichlet 環となる。

上の命題より，Fuhr，Phelps [10] Prop 6.4 はあきらかである。

§5. 関数環の tensor product について

K_1, K_2を局所凸空間E_1, E_2の compact 凸集合とする。$BA(K_1 \times K_2)$を積空間$K_1 \times K_2$上の連続な biaffine 関数よりなる空間とする。norm は uniform norm とする。$BA(K_1 \times K_2)$の state space を$K_1 \otimes K_2$であらわす。$h_1 \in A(K_1)$, $h_2 \in A(K_2)$に対して、$h_1 \otimes h_2 \in BA(K_1 \times K_2)$を次のように定義する。$(x, y) \in K_1 \times K_2$に対して、$h_1 \otimes h_2(x, y) = h_1(x) h_2(y)$。$K_1 \times K_2$から$K_1 \otimes K_2$の中への biaffine 連続写像$w$を次のように定義する。$a \in BA(K_1 \times K_2)$に対して、$w(x, y)(a) = a(x, y)$とする。$A_i$を$X_i$上の関数環とする$(i=1,2)$。$A_1 \otimes A_2$を$A_1$, A_2の algebraic tensor 積とする。$A_1 \hat{\otimes} A_2$は、$A_1 \otimes A_2$を uniform norm により完備化したものである。K_1, K_2をA_1, A_2の state space とし、Kを$A_1 \hat{\otimes} A_2$の state space とする。$Re(A_1 \hat{\otimes} A_2)$から$BA(K_1 \times K_2)$の中への線型写像$\Phi_0$を次のように定義する。$(x, y) \in K_1 \times K_2$, $f_1 + i f_2 \in A_1$, $g_1 + i g_2 \in A_2$に対して、

$$\Phi_0(f_1 g_1 - f_2 g_2) = \langle f_1, x \rangle \langle g_1, y \rangle - \langle f_2, x \rangle \langle g_2, y \rangle$$

とすると、Φ_0は連続写像になる。よって、$\overline{Re(A_1 \otimes A_2)}$まで拡張できる。$\Phi_0^*$を$BA(K_1 \times K_2)^*$から$(\overline{Re A_1 \hat{\otimes} A_2})^*$への連続線型写像とする。

関数環Aが u.r.m. であるとは、$x \in M(A)$に対して、xの maximal representing measure が唯一つ存在することであ

3. logmodular環, Dirichlet環はu.r.m.である。

命題を述べる前に tensor productに関する定理を紹介する。

定理5. (Namioka-Phelps, Lazar) $K_1 \otimes K_2$が Bauer simplexであるための必要十分条件は, K_1, K_2が Bauer simplexとなることである。

この定理の十分条件は, A. Lazar [2] により示され, 必要条件を, I. Namioka と R. R. Phelps [14]が示した。

定理6. (Namioka-Phelps [14] Th 2.3) $K_1 \otimes K_2$ の extreme pointの集合は $w(\mathrm{ex}K_1 \times \mathrm{ex}K_2)$ に等しい。

定理7. (Mochizuki [13] Th. 1) $A_1 \hat{\otimes} A_2$ に関する Choquet境界 $\partial_{A_1 \hat{\otimes} A_2} X_1 \times X_2$ は $\partial_{A_1} X_1 \times \partial_{A_2} X_2$ に等しい。

定理8. (Mochizuki [13] Th. 2) $A_1 \hat{\otimes} A_2$ の極大イデアル空间 $M(A_1 \hat{\otimes} A_2)$は, $M(A_1) \times M(A_2)$に等しい。

定理6と定理7より, $\Phi_0^*(\mathrm{ex}(K_1 \otimes K_2)) = \mathrm{ex}K = \varphi(\partial_{A_1} X \times \partial_{A_2} X)$ となることがわかる。

命題C. A_1, A_2をそれぞれ compact Hausdorff 空间 X_1, X_2 上の関数環とする。

(i) $A_1 \hat{\otimes} A_2$ が Dirichlet環である。

(ii) $A_1 = C(X_1)$ または, $A_2 = C(X_2)$.

(i)または(ii)のどちらかの条件が成り立つならば, Kと$K_1 \otimes K_2$は

affine 位相同型になる。

証明 (i)が成りたつとする。まず $K_1 \otimes K_2$ が Bauer simplex になることを示す。上の注意より，$f \in C_{\mathbb{R}}(ex(K_1 \otimes K_2))$ に対して，$f \circ \Phi_0^{*-1} \in C_{\mathbb{R}}(exK)$。命題Bと定理4より，$\tilde{h}|_{exK} = f \circ \Phi_0^{*-1}$ となる $\tilde{h} \in \mathcal{A}(K)$ が存在する。ゆえに，$\tilde{h} \circ \Phi_0^{*} \in \mathcal{A}(K_1 \otimes K_2)$。$\tilde{h} \circ \Phi_0^{*} = \tilde{f}$ とおくと，

$$\tilde{f}|_{ex(K_1 \otimes K_2)} = f, \quad \|\tilde{f}\|_{K_1 \otimes K_2} = \|f\|_{ex(K_1 \otimes K_2)}$$

よって，定理4より，$K_1 \otimes K_2$ は Bauer simplex となる。次に Φ_0^* が，1対1であることを示す。$z_1 (\neq) z_2 \in K_1 \otimes K_2$ ならば，Choquet - Meyer の定理より，z_i の maximal representing measure μ_i が唯一つ存在する $(i=1,2)$。$\mu_1 \neq \mu_2$ であることより $\int g \, d\mu_1 \circ \Phi_0^{*-1} \neq \int g \, d\mu_2 \circ \Phi_0^{*-1}$ となる $g \in C(exK)$ が存在する。よって，$\tilde{g}|_{exK} = g$ となる $\tilde{g} \in \mathcal{A}(K)$ が存在する。

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\Phi_0^*(z_1)) &= \int \tilde{g} \, d\mu_1 \circ \Phi_0^{*-1} = \int_{exK} g \, d\mu_1 \circ \Phi_0^{*-1} \neq \int_{exK} g \, d\mu_2 \circ \Phi_0^{*-1} \\ &= \int \tilde{g} \, d\mu_2 \circ \Phi_0^{*-1} = \tilde{g}(\Phi_0^*(z_2))\end{aligned}$$

ゆえに，Φ_0^* は1対1となる。

(ii) もし $A_1 = C(X_1)$ ならば，$Re A_1 = C_{\mathbb{R}}(X_1)$ となる。ゆえに，$\overline{Re(A_1 \hat{\otimes} A_2)} = \overline{Re A_1 \otimes Re A_2}$。$S(A_1)$ が Bauer simplex より，$\mathcal{A}(S(A_1)) \otimes \mathcal{A}(S(A_2))$ が $B\mathcal{A}(S(A_1) \times S(A_2))$ で稠密となることがわかる（cf.,[14]）。よって Φ_0 は位相同型になる。

系　A_1, A_2 を Dirichlet 環とする。このとき，$A_1 \hat{\otimes} A_2$ が Dirichlet 環である必要十分条件は，K と $K_1 \otimes K_2$ が affine 位相同型になることである。

上の命題と定理5より　$A_1 \hat{\otimes} A_2$ が Dirichlet 環ならば，A_1, A_2 が Dirichlet 環になることがわかる (cf. [13])。また，次の補題は N. mochizuki [13] Lemma. 3 の state space への拡張になっている。η を 至$^{*}\circ\omega$ とする。

補題　P_i を K_i の part とする $(i=1,2)$。このとき，$\eta(P_1 \times P_2)$ は K の part に含まれる。

証明　$x_1, y_1 \in K_1$, $x_2, y_2 \in K_2$ とするとき，$x_1 \approx y_1$, $x_2 \approx y_2$ となることと　$\eta(x_1, x_2) \approx \eta(y_1, y_2)$ となることが同値であることを示す。$\eta(x_1, x_2) \approx \eta(y_1, y_2)$ ならば，$h_1 \in \mathcal{A}(K_1)$, $h_2 \in \mathcal{A}(K_2)$ に対して，$h_1 \otimes 1$, $1 \otimes h_2 \in \mathcal{BA}(K_1, K_2)$ となることより　$x_1 \approx y_1$　$x_2 \approx y_2$ となる。逆は，$face(\eta(x_1, x_2)) = face(\eta(y_1, x_2))$, $face(\eta(y_1, x_2)) = face(\eta(y_2, x_2))$ を示せばよい。$\alpha \geq \beta \geq 1$ ならば，$D_\alpha(\eta(x_1, x_2)) \supset D_\beta(\eta(y_1, y_2))$ となることより，$z \in face(\eta(x_1, x_2))$ ならば，

$$z = \alpha(\eta(x_1, x_2)) - (\alpha - 1) z_1, \quad x_1 = \alpha y_1 - (\alpha - 1) x$$

となる　$\alpha \geq 1$, $z_1 \in K$, $x \in K_1$ が存在する。ゆえに，

$$z = \alpha^2 (\eta(y_1, x_2)) - (\alpha^2 - 1)\left\{\frac{\alpha}{\alpha+1}\eta(x, x_2) + \frac{1}{\alpha+1} z_1\right\}$$

$\frac{\alpha}{\alpha+1}\eta(x, x_2) + \frac{1}{\alpha+1} z_1 \in K$ より，$z \in face(\eta(y_1, x_2))$。よって，

$$face(\eta(x_1, x_2)) \subset face(\eta(y_1, x_2))。$$

同様にすると，

$$face(\eta(x_1, x_2)) \supset face(\eta(y_1, x_2))。$$

命題D　$A_1 \hat{\otimes} A_2$ が u.r.m. ならば，A_1 または，A_2 は non-trivial Gleason part をもたない。

証明　P_1 を A_1 の non-trivial Gleason part と仮定する。このとき，もし，A_2 の non-trivial Gleason part P_2 が存在するならば，$P = \eta(P_1 \times P_2)$ は，補題より $M(A_1 \hat{\otimes} A_2)$ の Gleason part となる。一方，仮定と定理8より，A_1，A_2 は u.r.m. となる。ゆえに，Wermer の定理より，(P_1, d_1) (P_2, d_2) $(\eta(P_1 \times P_2), d)$ は単位閉円板Dと位相同型になる，ただし，d_1, d_2, d をそれぞれ P_1, P_2, P の part metric とする。その同型写像をそれぞれ，τ_1, τ_2, τ とする。また，$\eta(x_1, x_2), \eta(y_1, y_2) \in P$ に対して，

$$\begin{aligned} d(\eta(x_1, x_2), \eta(y_1, y_2)) &= \sup\{|\log\langle u, \eta(x_1, x_2)\rangle - \log\langle u, \eta(y_1, y_2)\rangle|; u \in Re(A_1 \hat{\otimes} A_2), u > 0\} \\ &\geq \sup\{|\log\langle u_1 \otimes 1, \eta(x_1, x_2)\rangle - \log\langle u_1 \otimes 1, \eta(y_1, y_2)\rangle|; u_1 \in Re\, A_1, u_1 > 0\} \\ &= \sup\{|\log\langle u_1, x_1\rangle - \log\langle u_1, y_1\rangle|; u_1 \in Re\, A_1, u_1 > 0\} \\ &= d_1(x_1, y_1) \end{aligned}$$

となることより，$2d \geq d_1 + d_2$ となり，$(\tau_1^{-1} \times \tau_2^{-1}) \circ \tau$ はDから $D \times D$ の上への1対1連続写像となっている。よって矛盾となり，P_2 は trivial part でなければならない。

B. Cole([8]) と R. F. Basener([6]) は全ての part が trivial partであって, $C(X)$と異なる関数環の例をあげている。D.R. Wilkin([17])は, Xが$\mathbb{C}$のcompact部分集合の場合に, $R(X)$に関しては, 全てのpartがtrivial partならば, $R(X)=C(X)$となることを示した。Dirichlet環の場合に$R(X)$と同様のことが成立するかどうかは一般にはわからない。もし, 成立するならば, $A_1 \otimes A_2$がDirichlet環であるとき, $A_1=C(X_1)$または, $A_2=C(X_2)$にかぎられることが上の命題よりわかる。

References

1. E.M. Alfsen; Compact convex sets and boundary integrals. Springer Verlag Berlin. (1971).
2. E.M. Alfsen; On the Dirichlet problem of the Choquet boundary. Acta Math., 120 (1968) 149-159.
3. E.M. Alfsen and B. Hirsberg, On dominated extentions in linear subspaces of C(x), Pacific J. of Math. 36 (1971) 567-584.
4. T.B. Andersen, On dominated extention of continuous affine function on split faces, Math. Scand. 29 (1971) 298-306.
5. T.B. Andersen, On Banach space valued extentions from split faces, Pacific J. of Math. 42 (1972) 1-9.
6. R.F. Basener; An example concerning peak points. Notices Amer. Math. Soc., 18 (1971) 415-416.
7. H.S. Bear; Lectures on Gleason Parts. Springer-Verlag Berlin, 1970.

8. B. Cole; One point parts and the peak point conjecture. Ph.D. dissertation, Yale University, 1968.

9. E.J. Ellis, On split faces and function algebras, Math. Ann. 195 (1972) 159-166.

10. R. Fuhr and R.R. Phelps; Uniqueness of complex representing measures on the Choquet boundary. J. Functional Analysis, 14 (1973) 1-27.

11. K. Hoffman; Analytic functions and logmodular Banach algebras. Acta Math., 108 (1962) 271-317.

12. A. Lazar, Affine products of simplexes. Math. Scand., 22 (1968) 165-175.

13. N. Mochizuki; The tensor product of function algebras. Tohoku Math. J., 17 (1965) 139-146.

14. I. Namioka and R.R. Phelps; Tensor products of compace convex sets. Pacific J. Math., 13 (1969) 469-480.

15. R.R. Phelps; Lectures on Choquets theorem, Math. Studies Princeton (1966).

16. E.L. Stout; The theory of uniform algebras. Bogden & Quigley, Inc. Publishers, (1971).

17. D.R. Wilken; Lebesque Measure of parts for R(X). Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967) 508-512.