数理解析研究所講究録
第 206 巻 1974 年 50-63

Prediction Theory に就いて

東北大 教養 大野芳希

Helson [5] 等によって Prediction Theory 形の結果がいろいろと考えられているが、ここでは Helson-Szegö [8] 形の問題を中心に Prediction Problems をいくつか紹介する。

§1. Prediction Problems

Hilbert空間$\mathcal{H}$の元 $\cdots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \cdots$ の process $\{X_n\}$ が stationary であるとは任意の n, m に対して $(X_{n+m}, X_m) = (X_n, X_0)$ なることである．この場合 $\rho(n) = (X_n, X_0)$ は positive definite である。実際

$$\sum_{n,m=1}^{r} c_n \bar{c}_m \rho(n-m) = \sum_{n,m=1}^{r} c_n \bar{c}_m (X_n, X_m) = \left\| \sum_{n=1}^{r} c_n X_n \right\|^2 \geq 0$$

となる．従って Herglotz-Bochner の定理から $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ 上の正測度 μ が存在して

$$\rho(n) = \int e^{-inx} d\mu(x) \quad .$$

このとき $L^2(d\mu)$ の中に ある意味で $\mathcal{H}$ の process $\{X_n\}$ と同値な stationary process を与えることができる；

$$\tilde{X}_n = \chi^{-n} \qquad (\chi(e^{ix}) = e^{ix})$$

とおけば 任意の n, m に対して

$$(\tilde{X}_n, \tilde{X}_m) = \int \chi^{-(n-m)} d\mu = \rho(n-m) = (X_n, X_m).$$

従って $\mathcal{H}$ に於ける process を調べるのに $L^2(d\mu)$ の process を研究するのが便利であることが多い。

S を 0 を含まない、整数の（任意の）集合とする。このとき X_0 を $\{X_n ; n \in S\}$ の元の1次結合で近似することを考える。

$$\| X_0 - \sum_S a_n X_n \|^2 = \int | 1 - \sum_S a_n \chi^{-n} |^2 d\mu$$

だから X_0 を $\{X_n ; n \in S\}$ の元の1次結合で近似する問題は上の式の右辺の積分を最小にすることゝ同値である。この様な $L^2(d\mu)$ の三角多項式による近似の理論を（Kolmogoroff の意味での）Prediction という。これに関連して $n \in \mathbb{Z}$ に対して次の様に定義する；

$\mathfrak{F}_n$; $\chi^n, \chi^{n+1}, \chi^{n+2}, \cdots$ で生成された $L^2(d\mu)$ の subsp.

$\mathfrak{P}_n$; $\chi^n, \chi^{n-1}, \chi^{n-2}, \cdots$ で生成された $L^2(d\mu)$ の subsp.

$\mathfrak{F}_1$ を process の future, $\mathfrak{P}_1$ を past という。また μ の, T 上の normalized Lebesgue measure σ に関する Lebesgue

分解を $d\mu = w\,d\sigma + d\mu_s$ $(0 \le w \in L^1(d\sigma))$ としておく.

1st Prediction Problem

普通の意味で Prediction と呼ばれるもので、上で $S = \{-1, -2, \cdots\}$ とした場合に相当し、process で, 1 と past との距離を求める問題になる. Szegö の定理で解が与えられることは良く知られている.

定理 1 (Szegö の定理)

$$\inf \int |1 - f|^2 d\mu = \exp \int \log w \, d\sigma \quad .$$

此処で inf は次の形の三角多項式全体に就いてとられる;

$$f = a_1 \chi + a_2 \chi^2 + \cdots + a_n \chi^n + \cdots \quad .$$

2nd Prediction Problem

$S = \{\pm 1, \pm 2, \cdots\}$ とした場合に相当し、process で、1 と、Past と future を含む最小の subsp との間の距離を求める問題になる. 解は次の Kolmogoroff の定理で与えられる.

定理 2 (Kolmogoroff の定理)

$$\inf \int |1 - (f+g)|^2 d\mu = \left(\int w^{-1} d\sigma\right)^{-1} .$$

此処で inf は次の形の三角多項式 f, g に就いてとられる;

$$f = a_1 \chi + a_2 \chi^2 + \cdots + a_n \chi^n + \cdots \quad ,$$

$$g = b_1 \chi^{-1} + b_2 \chi^{-2} + \cdots + b_n \chi^{-n} + \cdots \quad .$$

上の2つの結果から w が 小さすぎなければ 即ち右辺が正なら, exponentials e^{inx} は $L^2(d\mu)$ で或る種の独立性を持っていると考えられる. この観点から Helson-Szegö [8] は次の定義をした.

定義 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ に対して

$$\rho(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \sup |(f, g)|$$

とおく. 此処で sup は $f \in \mathfrak{M}, \|f\| \leq 1, g \in \mathfrak{N}\ \|g\| \leq 1$ に就いてとる. 明らかに $0 \leq \rho(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \leq 1$. 特に $\rho(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) < 1$ なるとき $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ は at positive angle であるという.

$$\rho_n = \rho(\mathcal{P}_0, \mathcal{F}_n) \qquad n = 1, 2, \cdots$$

とおく.

3rd Prediction Problem (Helson-Szegö Problem).

$\rho_n < 1$ となる様な測度 μ を決定する問題で, 解は次の様になる.

定理3 $n = 1, 2, \cdots$ とする. $\rho_n < 1$ なるための必要十分条件は μ が σ に関して絶対連続; $d\mu = w\,d\sigma$ であって

$$w = |P|^2 e^{u + \tilde{v}}$$

と表わせることである. 此処で P は $\deg P < n$ なる多項式で, u, v は real & bounded, 且つ或る $\varepsilon > 0$ に対して $\|v\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$、$\tilde{v}$ は v の conjugate function.

定理3の $n = 1$ の場合は Helson-Szegö [8], $n > 1$ の場合

は Helson-Sarason [7] による.

4th Prediction Problem

$n \to \infty$ のとき $\rho_n \to 0$ となる様な測度 μ を決定する問題で、答は次の Helson-Sarason の定理で与えられる.

定理4 (Helson-Sarason [7]) $\rho_n \to 0$ $(n \to \infty)$ なるための必要十分条件は μ が σ に関して絶対連続; $d\mu = w\,d\sigma$ で,

$$w = |P|^2 e^{u+\tilde{v}}$$

と表わせることである. 此処で P は多項式で, $u, v \in C(T)$ $\tilde{v}$ は v の conjugate function.

§2. Uniform Algebras への拡張

X を compact Hausdorff 空間、A を X 上の uniform algebra とし、X 上の unique representing measure m を持つ様な A の complex homomorphism ϕ を固定する. ϕ によって決定される maximal ideal を A_0 とする.

Szegö の定理と Kolmogoroff の定理の uniform algebra への拡張として次の定理をうる.

X 上の正測度 μ の m に関する Lebesgue 分解を $d\mu = w\,dm + d\mu_s$ とする.

定理4 (一般化された Kolmogoroff-Szegö-Krein の定理)

$$\inf_{f \in A_0} \int |1-f|^2 d\mu = \exp \int \log w\,dm$$

定理5（一般化された Kolmogoroff の定理）

$$\inf_{f \in A_0 + \bar{A}_0} \int |1-f|^2 d\mu = \left(\int w^{-1} dm \right)^{-1}$$

定理4は抽象的な Hardy 空間の理論の中で有名な結果である．定理4の証明とこれに関連した話題は Gamelin [4], Leibowitz [9] 等の本にみられる．また Szegö の定理の matrix valued function への拡張は Helson - Lowdenslager [6] 等にある．定理5の証明は Forelli [3] にある．

次に Helson - Szegö Problem 形の結果を考える．X 上の正測度 μ に対して

$$H^p(d\mu) = A \text{ の } L^p(d\mu)\text{-閉包} \qquad (0 < p < \infty)$$

$$H_0^p(d\mu) = A_0 \text{ の } L^p(d\mu)\text{-閉包} \qquad (0 < p < \infty)$$

と置く．（$p = \infty$ のときは w^*-閉包とする．）

$u \in \mathrm{Re}A$ に対して次の様な $v \in \mathrm{Re}A$ が一意に定まる；$\int v\, dm = 0$, $u + iv \in A$．この v を Cu で表わし，u の conjugate という．線形作用素 C ; $\mathrm{Re}A \to \mathrm{Re}A$ を conjugate operator という．線形性により，C は，複素 vector 空間 $\mathrm{Re}A + i\mathrm{Re}A$ 上の線形作用素 C に拡張できる．P を $L^2(dm)$ から $H^2(dm)$ の上への射影とすれば

$$Pu = \frac{1}{2}\left[u + \int u\, dm + i\, Cu \right] \qquad (u \in \mathrm{Re}A)$$

が成り立つ．従って C, P を $\mathrm{Re}A + i\mathrm{Re}A$ に制限したとき，C

が $L^2(d\mu)$-bounded であることゝ、P が $L^2(d\mu)$-bounded であることは同値である．また次の命題が成り立つ[1]．

命題 6　$H^2(d\mu)$ と $\overline{H_0^2}(d\mu)$ が at positive angle である必要十分条件は P（或は C）を $\mathrm{Re}A + i\,\mathrm{Re}A$ に制限したとき，これが $L^2(d\mu)$-bounded であることである．

従って Helson-Szegö の問題は μ がどの様なときに次の様な定数 $B>0$ が存在するか？と同値になる；

$$\int_X |Cf|^2 d\mu \leq B \int |f|^2 d\mu \qquad ({}^\forall f \in \mathrm{Re}A)$$

$\mu = m$ に対して上の様な B が存在する（M. Riesz の定理）．従って C は $L^2(dm)$ に拡張できる．以下に於いて μ は m に関して絶対連続であるとする；$d\mu = w\,dm$（$0 \leq w \in L^1(dm)$）．$H^2(w\,dm)$ と $\overline{H_0^2}(w\,dm)$ が at positive angle になる様な w を考えよう．このとき $\int \log w\,dm = -\infty$ なら Szegö の定理から $1 \in H^2(w\,dm) \cap \overline{H_0^2}(w\,dm)$ となり $H^2(w\,dm)$ と $\overline{H_0^2}(w\,dm)$ は at positive angle でなくなる．従って $\int \log w\,dm > -\infty$ と仮定してよい．このとき $w = |f|^2$ となる様な $H^2(dm)$ の outer function f が存在する．

定理 7　$H^2(w\,dm)$ と $\overline{H_0^2}(w\,dm)$ が at positive angle である必要十分条件は $H^\infty(dm)$ の invertible element g が存在して $\| \mathrm{Arg}\, g f^2 \|_\infty < \frac{\pi}{2}$ となることである．$(-\pi \leq \mathrm{Arg}\, z \leq \pi$

定理 8　$H^2(w\,dm)$ と $\overline{H_0^2}(w\,dm)$ が at positive angle であ

る必要十分条件は

$$w = e^{u + \tilde{v}}$$

と表わせることである．此処で $u, v \in L^\infty_R(dm)$ で，或る $\varepsilon > 0$ に対して $\|v\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$．

$w = |f|^2$ だから $w = f^2 e^{-i\varphi}$ とおけば

$$\rho = \rho\,(H^2(w\,dm), \overline{H^2_0}(w\,dm))$$
$$= \sup_{g,h} \left|\int (gf)(hf)\, e^{-i\varphi}\, dm\right| \qquad \left(\begin{array}{l} g \in A,\ \int |g|^2 d\mu \leq 1 \\ h \in A_0,\ \int |h|^2 d\mu \leq 1 \end{array}\right)$$

f; outer だから $\{gf\,;\, g \in A\}$ $\{hf\,;\, h \in A_0\}$ は夫々 $H^2(dm)$, $H^2_0(w\,dm)$ で $L^2(dm)$-dense．従って $\{ghf^2\,;\, g \in A, h \in A_0, \int |g|^2 d\mu, \int |h|^2 d\mu \leq 1\}$ は $H^1_0(dm)$ の単位球で稠密となり

$$\rho = \sup_h \left|\int h\, e^{-i\varphi}\, dm\right| \qquad (h \in H^1_0(dm), \int |h|\, dm \leq 1)$$

と表わせる．故に ρ は $H^1_0(dm)$ 上の線形汎函数 $h \longmapsto \int h e^{-i\varphi} dm$ の norm である．この汎函数の $L^1(dm)$ 上への拡張は $h \longmapsto \int h(e^{-i\varphi} - g)\, dm$ $(g \in H^\infty(dm))$ の形で，従って Hahn-Banach の定理から

$$(*) \qquad \rho = \inf_g \|g - e^{-i\varphi}\|_\infty \qquad (g \in H^\infty(dm))$$

こゝで一般に次の主張が成り立つことを用いる．

(I) $f \in H^1(dm)$ $\mathrm{Re} f \geq 0 \Rightarrow f$: outer

(II) $f \in H^1(dm)$ $\mathrm{Re} f \geq 0 \Rightarrow \widetilde{\mathrm{Arg} f} = -\log|f| + \log|\hat{f}(\phi)|$.

さて $\rho < 1$ とすれば $(*)$ から $\exists\, \varepsilon > 0, \exists\, g \in H^\infty(dm)$;

$$|g(x)| \geq \varepsilon \ ,\ |\varphi(x) + \mathrm{Arg}\, g(x)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \qquad \text{on } X$$

従って $\|\mathrm{Arg}\, gf^2\|_\infty = \|\varphi + \mathrm{Arg}\, g\|_\infty \le \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. 故に $gf^2 \in H^1(dm)$ で $\mathrm{Re}\, gf^2 \ge 0$ となるから (I) から gf^2; outer. 従って g; outer となり g が $H^\infty(dm)$ の invertible element であることが従う. また $u = \log|g^{-1}| + \log|\widehat{gf^2}(\phi)|$, $v = -\mathrm{Arg}\, gf^2$ とすれば, $u \in L^\infty_R(dm)$ で, $\mathrm{Re}\, gf^2 \ge 0$ だから (II) から $Cv = \log|gf^2| - \log|\widehat{gf^2}(\phi)|$. 故に $w = e^{u+Cv}$ と表わせる.

逆に w が定理8の表現を持ったとする. e^{-u} は bounded away from 0 だから P; $L^2(dm) \to H^2(dm)$ は $L^2(w\,dm)$-norm; $L^2(e^{-u}w\,dm)$-norm で同時に bounded であるか unbounded である. 故に命題6から [$H^2(w\,dm)$, $\bar{H}_0^2(w\,dm)$; at positive angle $\Leftrightarrow$ $H^2(e^{-u}w\,dm)$, $\bar{H}_0^2(e^{-u}w\,dm)$; at positive angle.]. 従って $H^2(w\,dm)$, $\bar{H}_0^2(w\,dm)$ が at positive angle であることを示すためには $u \equiv 0$ としてよい. このとき $V = e^{Cv - iv}$ とおけば $V \in H^1(dm)$; outer で $w = |V|$; $w = Ve^{iv}$. $\|v\|_\infty \le \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ だから $0 < \lambda < 1$ を十分小さくとっておけば $\|e^{iv} - \lambda\|_\infty < 1$. このとき

$$\begin{aligned}
\rho &= \sup_{f,g} \left| \int f g V e^{iv} dm \right| && \left(\begin{matrix} f \in A & \int |f|^2 d\mu \le 1 \\ g \in A_0 & \int |g|^2 d\mu \le 1 \end{matrix} \right) \\
&\le \sup_h \left| \int h e^{iv} dm \right| && \left(h \in H_0^1(dm),\ \int |h| dm \le 1 \right) \\
&\le \sup \left| \int h (e^{iv} - \lambda) dm \right| && (\quad \text{〃} \quad\quad \text{〃} \quad) \\
&\le \|e^{iv} - \lambda\|_\infty < 1
\end{aligned}$$

//

命題6～定理8は Devinatz [1, 2], Ohno [12] による. また conjugate operator に就いては Rudin [13], Devinatz [2] に詳しい. 定理8の応用としては次の様な結果が考えられる (Devinatz [1] の結果).

＊ $\theta = \bar{\psi}/\psi$ $(\psi, \psi^{-1} \in H^2(dm))$, $w = |\psi|^2$ とする. このとき Toeplitz operator T_θ が invertible である必要十分条件は $H^2(wdm)$, $\overline{H_0^2}(wdm)$ が at positive angle であることである.

＊ ϕ ; 有界可測とする. T_ϕ が invertible である必要十分条件は $\phi = \gamma e^{u + i\tilde{v} + c w}$ と表わせることである. 此処で $u, v, w \in L_R^\infty$, $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$, γ ; $|\gamma| = 1$ なる定数.

また定理3, 定理4に関連して

$$\rho_n = \rho(H^\infty(d\mu), \{H_0^\infty(d\mu)\}^n)$$

とおいたときの $\rho_n < 1$ $(n > 1)$ なるための条件, $\rho_n \to 0$ なるための条件が考えられるが詳しいことは分っていない.

次に Merrill [10] によって与えられた Helson-Szegö の問題の形の結果を紹介する. 以下に於いては m を含む Gleason part $P(m)$ は non-trivial であるとする;

$$P(m) = \{\sigma \in \mathfrak{M}(A) ; \|\sigma - m\| < 2\} \neq \{m\}$$

(m は ϕ の unique representing measure であった.)

$1 \leq p \leq \infty$ に対して次の様におく.

$$I^p = \{ f \in H^p(dm) ;\ \int f\, d\sigma = 0 \ (\forall \sigma \in P(m)) \}$$
$$\mathcal{L}^p = \{ f \in L^p(dm) ;\ \int f h\, dm = 0 \ (\forall h \in I^\infty \cup \bar{I}^\infty) \}$$
$$J^p = \mathcal{L}^p \oplus I^p$$

$P(m)$を単位円板$\{z \in \mathbb{C} ; |z|<1\}$上にうつすWermerのimbedding functionをZとすれば$f \in H^p(dm)$に対して$[f \in I^p \Leftrightarrow \int \bar{Z}^n f\, dm = 0 \ (n=0,1,2,\cdots)]$で、$Z, \bar{Z}$の多項式全体の$L^p(dm)$－閉包が$\mathcal{L}^p$と一致する．$I^p, \mathcal{L}^p, J^p$の基本的な性質はMerrill－Lal[11]に詳しい．

X上の正測度μはmに関して絶対連続である；$d\mu = w\, dm$ $(0 \le w \in L^1(dm))$とし、wのsupport setをEとする．

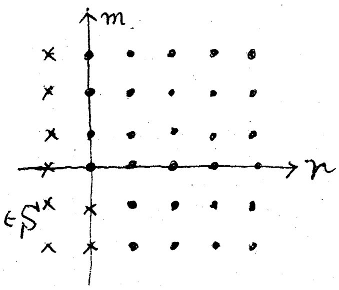
<u>定理9</u>（Merrill, III[10]）　I^∞と$\bar{I}^\infty$が$L^2(w\, dm)$でat positive angleであるための必要十分条件は$\chi_E \in \mathcal{L}^\infty$で、

$$w = |V| e^u$$

と表わせることである．此処で$u \in L^\infty_R$, $V \in J^1$, $\|\operatorname{Arg} V\|_\infty \le \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$．

証明は定理8の証明と同様で、outer functionと類似の性質を持つ$D \in J^2$を$w = |D|^2$となる様にとればよい．

定理9を1つの例で考えておく．



$S = \{(n,m) ;\ n>0\} \cup \{(0,m) ;\ m \ge 0\}$

なる格子点の集合を考え，$\{e^{in\theta} e^{im\varphi}\}_{(n,m)\in S}$の多項式で一様近似できる様な$f \in C(T^2)$

全体の集合を $A(T^2)$ とする. $A(T^2)$ は T^2 上の logmodular algebra で, normalized Haar measure m を含む part は $\{(0,\varphi); |\varphi|<1\}$ で non-trivial. Wermer の imbedding function は $z = e^{i\varphi}$ だから

$I^\infty = \{ e^{in\theta}e^{im\varphi}\ (n \geq 1)$ の多項式$\}$ の w^*-閉包.

$\mathcal{L}^\infty = \{ e^{im\varphi}\ (m \in \mathbb{Z})$ の多項式$\}$ の w^*-閉包.

$\mathfrak{F}^\infty = \{ e^{in\theta}e^{im\varphi}\ (n<0,\ m \in \mathbb{Z})$ の多項式$\}$ の w^*-閉包.

となる. 定理9から T^2 上の正測度 μ が m に関して絶対連続なとき $L^2(d\mu)$ の doubly stochastic process $\{e^{-in\theta}e^{-im\varphi}\}$ の past : $\{e^{-in\theta}e^{-im\varphi};\ n<0,\ m \in \mathbb{Z}\}$ で生成された subsp. と future ; $\{e^{-in\theta}e^{-im\varphi};\ n \geq 0,\ m \in \mathbb{Z}\}$ で生成された subsp. が at positive angle になるための必要十分条件が分る.

文　献

[1] Devinatz, A. Toeplitz operators on H^2 spaces. Trans. A.M.S., 112 (1964) 304-317

[2] Devinatz, A. Conjugate function theorems for Dirichlet algebras. Rev. U. Mat. Argentina, 23 (1966/67) 3-30.

[3] Forelli, F. The Marcel Riesz theorem on Conjugate functions. Trans. A.M.S., 106 (1963) 369-390.

[4] Gamelin, T.W. Uniform Algebras. Prentice-Hall 1969.

[5] Helson, H. Méthodes complexes et méthodes de Hilbert en analyse de Fourier. Orsay, 1967.

[6] Helson, H. & Lowdenslager, D. Prediction theory and Fourier series in several variables, I, II. Acta Math., 99 (1958), 165-202, 106 ((1961), 173-213.

[7] Helson, H. & Sarason, D. Past and Future. Math. Scand. 21 (1967), 5-16.

[8] Helson, H. & Szegö, G. A problem in prediction theory. Ann. Mat. Pura Appl. 51 (1960), 107-138.

[9] Leibowitz, G.M. Lectures on complex function algebras. Scott Foresman and Co. 1970.

[10] Merrill, III, S. Gleason parts and a problem in prediction theory. Math. Zeit. 129 (1972) 321-329

[11] Merrill, III, S. and Lal. N., Characterization of certain invariant subspaces of H^p and L^p spaces derived from logmodular algebras. Pacific J. M. 30 (1969) 463-474.

[12] Ohno, Y. Remarks on Helson-Szegö problems. Tôhoku M. J. 18 (1966), 54-59

[13] Rudin, W. Fourier analysis on groups. Interscience 1967.

[14] Sarason, D. An addendum to "Past and Future", Math. Scand. 30 (1972) 62-64.