

Decomposable operators in continuous fields of Hilbert spaces

東北大 教養 武元英夫

§ 1. 序

Hilbert spaces の continuous fields 上の unbounded operators に対する decomposable 論を進める。こゝで"の"語は Stone [2] によつて導入した K Hilbert space における unbounded operators に対する characteristic matrix と承えることによつて, Nuesbaum [3] の語と各 fibre が可分かつ separable ならば"を"にまで拡張する。ことである。

こゝでは次の様な記号, 概念を用ゐる。

- 1). Ω ; Stonean space
- 2). $C(\Omega)$; Ω 上の all complex-valued continuous functions の algebra
- 3). $\{H(\omega); \omega \in \Omega\}$ は Ω 上の Hilbert spaces の field とし、 K 時、 $\xi = \{\xi(\omega)\} \in \prod H(\omega)$ は vector field と呼ぶ。
- 4). $\xi = \{\xi(\omega)\}, \eta = \{\eta(\omega)\}$ に対して,
 $(\xi, \eta) : \omega \rightarrow (\xi(\omega) | \eta(\omega)), \quad |\xi| : \omega \rightarrow \|\xi(\omega)\|$

2

- 5). $A = \{A(\omega)\} \in \prod B(H(\omega))$ is operator field と呼ぶ $\xi = \{\xi(\omega)\} \in \prod H(\omega)$ に對して $A\xi \equiv \{A(\omega)\xi(\omega)\}$ によつて $A\xi$ を定める。
- 6). $C_F(\Omega, H(\omega)) \in [3]$ で定められた F is fundamental subspace とし $\tau \in \tau$ continuous field of Hilbert spaces over Ω とする。

こゝでは話の都合上、 Ω is Stonean space とし話を進めて行くが、内容の多くはこれに限りかたはらぬ。

- 7). $A : H = C_F(\Omega, H(\omega))$ における operator τ 定義域 $\mathcal{D}(A)$ とし、 τ であるとする。この時、 $\mathcal{D}(A)$ は submodule τ A は $\mathcal{D}(A)$ 上の $C(\Omega)$ -module homomorphism であるとする。

§ 2. S -closed operator.

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$ における operator A が closed であるとは、Hilbert space H における operator theory と同じに $\text{graph } G(A) = \{\xi, A\xi : \xi \in \mathcal{D}(A)\}$ が closed になることをいう。更に closedness にもう少し条件をつけるとよつて S -closed operator なるものを導入しよう。その前に幾つかの準備を使う。

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces over Ω .

$S \subset H$: closed submodule

$S(\omega) = \{\xi(\omega) : \xi \in S\}$ for every $\omega \in \Omega$.

この時、次を得る。

補題 2.1.

$\mathcal{H} = C_F(\Omega, \mathcal{H}(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces over Ω .

$\mathcal{S} < \mathcal{H}$: closed submodule

\Rightarrow

$\mathcal{S}(\omega)$: closed subspace of $\mathcal{H}(\omega)$, for every $\omega \in \Omega$.

以上の事から次の概念を導入する。次の定義は Kaplansky [4] の AW^* -submodule に相当するが、我々の場合は Ω が Stonean space であることも考慮していることがおまじけである。

定義 2.2.

$\mathcal{H} = C_F(\Omega, \mathcal{H}(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces over Ω .

$\mathcal{S} < \mathcal{H}$: closed submodule

\mathcal{S} が continuous submodule であるとは $\mathcal{S} = C_S(\Omega, \mathcal{S}(\omega))$ であることである。

この時、我々は次の事を得る。

定理 2.3.

$\mathcal{H} = C_F(\Omega, \mathcal{H}(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces over Ω .

$\mathcal{S} < \mathcal{H}$: closed submodule

この時、次の \Rightarrow は同値である。

4

- (1) S は continuous submodule である。
- (2) $\forall \xi \in \Pi(S(\omega)) \quad \omega \rightarrow \|\xi(\omega)\|$: 有界, $\forall \eta \in S$ に $\exists \eta_1, \eta_2, \omega \rightarrow$
 $(\xi(\omega) | \eta(\omega))$: 連続
 $\Rightarrow \xi \in S$.

上の事は、次の事からも分る様に、 $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ の projection を決定することになる。そして、Stone の K の characteristic matrix を考える時 K はどうしても projection の話が必要となるので上の事と次の事を考えるわけである。

系 2.4.

- $H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces over Ω .
- $S \subset H$: continuous submodule
- $\Rightarrow \exists P$: projection, $P\xi = \xi$ for $\forall \xi \in S$.
- 逆に、 $P \in B(H)$ を projection (ie. $P^2 = P, P^* = P$) とすると $S = PH$ は continuous submodule となる。

$H_i = C_{F_i}(\Omega, H_i(\omega)) \quad (i=1, 2)$: continuous fields of Hilbert spaces

$H_1 \oplus H_2$: H_1 と H_2 の direct sum

$\{\xi_1, \xi_2\} \in H_1 \oplus H_2, \{\eta_1, \eta_2\} \in H_1 \oplus H_2, \lambda \in C(\Omega)$ に $\exists \eta_1, \eta_2$.

$$(\{\xi_1, \xi_2\}, \{\eta_1, \eta_2\}) = (\xi_1, \eta_1) + (\xi_2, \eta_2)$$

$$z\{\xi_1, \xi_2\} = \{z\xi_1, z\xi_2\}$$

$$\|\{\xi_1, \xi_2\}\| = \|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2\|^{1/2}$$

すなわち、 $H_1 \oplus H_2$ は $C(\Omega)$ -moduled normed space となる。更に、
 簡単は計算を次の事がわかる。

命題 2.5.

$H_i = C_F(\Omega, H_i(\omega))$ ($i=1,2$): continuous fields of Hilbert spaces over Ω .

\Rightarrow

$$H_1 \oplus H_2 = C_{F_1 \oplus F_2}(\Omega, H_1(\omega) \oplus H_2(\omega)).$$

A : operator with the domain $\mathcal{D}(A)$ in $H = C_F(\Omega, H(\omega))$.

(1) A : closed extension $\xi \in \mathcal{D}(A)$.

$$\Leftrightarrow \{\xi_n\}, \{\eta_n\} \subset \mathcal{D}(A); \lim \xi_n = \xi, \lim \eta_n = \eta$$

$$\text{if } \exists \lim A\xi_n, \exists \lim A\eta_n \Rightarrow \lim A\xi_n = \lim A\eta_n$$

$\xi \in \mathcal{D}(A)$ の時、 $\overline{\mathcal{G}(A)}$ in $H \oplus H$ が \mathcal{G} の operator \bar{A} の graph となる。 \bar{A} は A の closure とする。

(2) A^* : $(A\xi, \eta) = (\xi, \eta^*)$ for $\forall \xi \in \mathcal{D}(A)$ ならば η, η^* が存在する

時、 $A^*\eta = \eta^*$ とおく。

(3) $\tilde{\mathcal{D}}(A) = \{ \xi = \sum e_a \xi_a : \{ \xi_a \} \subset \mathcal{D}(A) : \text{b.d.d.}, \{ e_a \} \subset C(\Omega)_p : \text{with } \sum e_a = 1 \}$
 $\{ A\xi_a \} : \text{b.d.d.}$

$$\tilde{A} : \tilde{\mathcal{D}}(A) \rightarrow H \oplus H, \tilde{A}(\sum e_a \xi_a) \equiv \sum e_a A\xi_a$$

6

とある時、 $B \supset A$, $G(B)$ が $H \oplus H$ での continuous submodule かつ
 s operator B が存在すれば $B \supset \hat{A}$ となり、更に \hat{A} の closure $\overline{\hat{A}}$
 $\exists!$ して、 $G(\overline{\hat{A}})$ は $H \oplus H$ での continuous submodule となる。

定義 2.6.

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces

A : 定義域 $D(A)$ を \mathfrak{t} の operator

(1) A : s -closed operator $\stackrel{\text{def.}}{\iff} G(A)$: continuous submodule in $H \oplus H$

(2) A : s -closure を \mathfrak{t} の $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \hat{A}$ が closed extension を \mathfrak{t} の。

とある時、 A の s -closure を $\overline{A^s}$ とかくと $\overline{A^s} = \overline{\hat{A}}$ となる。

A^* の def. を前に述べたが、 $\widehat{D}(A)$ が $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ での dense である
 ならば A^* は定義される。しかも、この時、 A^* は常に
 s -closed operator となる。

次に、Hilbert space 上の operator theory から次の事柄が簡単に
 分かる。

命題 2.7.

(1) A : $\widehat{D}(A)$ が $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ での dense な s -closed op. $\Rightarrow A = A^{**}$

(2) A : $\widehat{D}(A)$ が dense なら \hat{A} が closure を \mathfrak{t} の

$\Rightarrow \exists A^{**}, \overline{G(\hat{A})} = G(A^{**})$.

§ 3. S -closed operator に対する characteristic matrix.

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$ に対し, $S \in H \oplus H \rightarrow H \oplus H$ の bounded (Ω) -module homomorphism (=: τ は, 単に $H \oplus H$ 上の bounded operator と呼んでいい) とする. 今 $H \oplus 0, 0 \oplus H$ が共に $H \oplus H$ の continuous submodule になるといえるから, $H \oplus H$ から $H \oplus 0, 0 \oplus H$ への \wedge の projection がそれぞれ存在する. したがって,

ある E_1, E_2 とおく. 今 $S'_{ij} = E_j S E_i$ ($i, j = 1, 2$) とすると

$$S'_{11} : H \oplus 0 \rightarrow H \oplus 0, \quad S'_{12} : H \oplus 0 \rightarrow 0 \oplus H$$

$$S'_{21} : 0 \oplus H \rightarrow H \oplus 0, \quad S'_{22} : 0 \oplus H \rightarrow 0 \oplus H.$$

=: τ . $H \oplus 0, 0 \oplus H$ を共に H と同じ τ の τ であると考え, S'_{ij} を $H \rightarrow H$ への operator として見たものを S_{ij} とおく. すると,

$$S : \{\xi_1, \xi_2\} \rightarrow \{S_{11}\xi_1 + S_{12}\xi_2, S_{21}\xi_1 + S_{22}\xi_2\}$$

となる. $\xi = \tau$. $S = (S_{ij})$ とおくと, S を matrix representation と呼ぶことにする.

$M : H \oplus H = C_{F \oplus F}(\Omega, H(\omega) \oplus H(\omega))$ の continuous submodule

$P : H \oplus H \rightarrow M$ projection

$P = (P_{ij}) : P$ の matrix representation

がある時, 次の事が挙がる.

命題 3.1. $H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces

M : $H \oplus H$ の continuous submodule

$P = (P_{ij})$: $H \oplus H \rightarrow M$ projection

ξ の時,

$\exists A$: s -closed operator, $G(A) = M \iff P_{12} \xi = (I - P_{22}) \xi = 0 \Rightarrow \xi = 0$.

上の条件が成り立つ時, A は次の形で一意に定まる.

$$A: P_{11} \xi_1 + P_{12} \xi_2 \rightarrow P_{21} \xi_1 + P_{22} \xi_2, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in H.$$

よって, $P_{21} = AP_{11}$, $P_{22} = AP_{12}$ となる.

定義 3.2.

A : $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ 上の s -closed operator.

P : $H \oplus H \rightarrow G(A)$, projection.

P の matrix representation $(P_{ij}) \in A$ の characteristic matrix とする.

すると, characteristic matrix は対称で, 次の性質が成り立つ.

命題 3.3.

(P_{ij}) : s -closed operator A の characteristic matrix.

if $\exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1}$: s -closed operator.

(Q_{ij}) : A^{-1} の characteristic matrix

$$\Rightarrow Q_{11} = P_{22}, \quad Q_{12} = P_{21}, \quad Q_{21} = P_{12}, \quad Q_{22} = P_{11}.$$

命題 3.4.

$(P_{ij}), (Q_{ij})$: 夫々 A, A^* の characteristic matrix

$$\Rightarrow Q_{11} = I - P_{22}, \quad Q_{12} = P_{21}, \quad Q_{21} = P_{12}, \quad Q_{22} = I - P_{11}.$$

§ 4. Decomposable operators.

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces.

次の事柄は [3] で示すことができる。

$$(1) \quad A \in B(H) \text{ に } \exists \tau, \exists \{A(\omega)\} \in \prod B(H(\omega)) : \forall \xi, \eta \in H, ((A\xi)(\omega) | \eta(\omega)) = (A(\omega)\xi(\omega) | \eta(\omega)), \forall \omega \in \Omega.$$

$$(2) \quad \{A(\omega)\} \in \prod B(H(\omega)) \rightarrow \omega \rightarrow \|A(\omega)\| : \text{bounded}, \forall \xi \in H \text{ に } \exists \tau \text{ かつ } \{A(\omega)\xi(\omega)\} \in H \Rightarrow \exists A \in B(H) : \forall \xi, \eta \in H, ((A\xi)(\omega) | \eta(\omega)) = (A(\omega)\xi(\omega) | \eta(\omega)), \forall \omega$$

(1) の形が A の τ の τ decomposable である, (2) の形は operator field が continuous であると呼んで来た。 (1) から $B(H)$ の元は operator field として表すことができ, (2) の形は $B(H)$ の元として表すことができるということを示す。

この節では, closed operators に τ かつ, 上の (1), (2) に相当することを示す。さらに, §3 で導入した s -closed operator の characteristic matrix の概念を使用する。

補題 4.1. $S = \{S(\omega)\} \in B(H)$: self-adjoint

$\exists S(\omega)^{-1}$ for $\forall \omega \in \Omega$ (if $\|S(\omega)\|$ is bounded & invertible) then,
 $\forall \xi \in H \rightarrow \xi(\omega) \in \mathcal{D}(S(\omega)^{-1}), \forall \omega \in \Omega, \omega \rightarrow \|S(\omega)^{-1}\xi(\omega)\|$: bounded
 $\Rightarrow \{S(\omega)^{-1}\xi(\omega)\} \in H = C_F(\Omega, H(\omega)).$

定理 4.2. $\{A(\omega)\}$: closed operators on field.

$\{P_{ij}(\omega)\}$: $A(\omega)$ の characteristic matrix.

$\{P_{ij}(\omega)\} (i, j=1, 2)$: continuous

$\xi \in H : \xi(\omega) \in \mathcal{D}(A(\omega)), \forall \omega \in \Omega, \omega \rightarrow \|A(\omega)\xi(\omega)\|$: bounded

$\Rightarrow \{A(\omega)\xi(\omega)\} \in H = C_F(\Omega, H(\omega))$

定理 4.3. $H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces

$\{A(\omega)\} \in \Pi B(H(\omega)) : \omega \rightarrow \|A(\omega)\|$ is bounded.

$\{P_{ij}(\omega)\}$: $A(\omega)$ の characteristic matrix.

この時、次は同値である。

(1) $\{A(\omega)\}$: continuous. (2) $\{P_{ij}(\omega)\} (i, j=1, 2)$: continuous.

定義 4.4. $\{A(\omega)\}$: closed operators on field.

$\{P_{ij}(\omega)\}$: $A(\omega)$ の characteristic matrix.

field $\{A(\omega)\}$ が continuous であるとは、各 field $\{P_{ij}(\omega)\}$ が continuous になることである。

上の定義が意味をもつことは、定理4.3 で示した様に、
 bounded operators a field に対して、今まで知らせている ξ の
 と同値に存在することがわかる。

$\{A(\omega)\}$: closed operators a field, continuous.

$E \equiv \{ \xi \in H : \xi(\omega) \in D(A(\omega)), \forall \omega \in \Omega, \omega \rightarrow \|A(\omega)\xi(\omega)\| : \text{bounded} \}$

ξ の時、 E は submodule となる。定理4.2 から $E \ni \xi$ に対
 して、 $\eta = \{A(\omega)\xi(\omega)\} \in H = C_f(\Omega, H(\omega))$ であるから残りの1次の
 様に1つ、operator in $H = C_f(\Omega, H(\omega))$ に定義するところが出来る。

$A : A\xi \equiv \eta$ where $\eta = \{A(\omega)\xi(\omega)\}$, $\xi \in E$.

すると、次の事がわかる。

定理4.5. $\{A(\omega)\}$: continuous field of closed operators.

$\Rightarrow A$: s-closed operator.

$D(A) = E$. where A, E は前に定められたもの。

系4.6. $\{A(\omega)\}, \{B(\omega)\}$: continuous field of closed operators

$\{A(\omega)\} = \{B(\omega)\} \Leftrightarrow A(\omega) = B(\omega)$, for $\forall \omega \in \Omega$.

系4.7. $\{A(\omega)\}$: continuous field of closed operators.

$D(A(\omega))$: dense in $H(\omega)$ ($\forall \omega$), $A = \{A(\omega)\}$ (定理4.5の意味で)

$\Rightarrow \{A(\omega)^*\} : \text{continuous}, \quad A^* = \{A(\omega)^*\}.$

以上の事柄は continuous の定義に従って, characteristic matrix の性質を調べていくとわかる.

$\{A(\omega)\}$ が closed operators の continuous field の時は S -closed operator $A \Rightarrow D(A) = \{\xi \in H : \xi(\omega) \in D(A(\omega)), \{\|A(\omega)\xi(\omega)\|\}^p \text{ 有界}\}, D(A(\omega)) = \{\xi(\omega) : \xi \in D(A)\}, (A\xi)(\omega) = A(\omega)\xi(\omega) \quad \forall \xi \in D(A), \omega \in \Omega$ なるものが存在した。よって, ^(cont) closed op.'s の field は $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ における S -closed operator として考えられる。次に, S -closed operator が closed operators の field に分解出来るかどうかを調べて行く。

定義 4.8. $H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces.

A : 定義域 $D(A) \in \mathcal{L}$ の S -closed operator.

A が decomposable であるとは, closed operators の continuous field $\{A(\omega)\}$ が存在して, $A = \{A(\omega)\}$ と表すことができる。

我々は全ての S -closed operator が decomposable であるとは限らな
が残念ながら次の例でも分る様に, 定義域から generate した
continuous submodule が全体であるとしても decomposable ではない
 S -closed operator の例を作ることが出来る。

例 4.9.

$H = C_F(\beta N, H(\omega))$, βN : N の Stone-Čech compactification.

τ は center が $C(\beta N)$ となる 標 τ type I von Neumann algebra を持つ τ 乗 τ と τ の H の τ 存在 τ 加 τ 。

$f \in C(\beta N)$: $f(\omega) = \frac{1}{n}$, $f(\omega) = 0$ for $\omega \in \beta N \setminus N$.

$D = fI$, $\xi \in H$, $(D\xi)(\omega) = f(\omega)\xi(\omega) \Rightarrow 0 \leq D \leq I$.

$$\text{今 } P = \begin{pmatrix} D & (D(I-D))^{\frac{1}{2}} \\ (D(I-D))^{\frac{1}{2}} & D \end{pmatrix}$$

と τ 加 τ . P は τ 加 τ 命題 3.1 が τ 加 τ . 従 τ . P は characteristic matrix と τ 加 τ 標 τ s -closed operator A が τ 存在 τ . $|P|$, $\omega \in \beta N \setminus N$ は τ 加 τ . $D(\omega) = 0$ τ 加 τ τ A は decomposable に τ 加 τ τ τ 加 τ .

τ τ . 定義域 τ $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ τ dense に τ 加 τ 標 τ s -closed operator τ 加 τ τ . 次 τ 定理 に τ 加 τ 標 τ . τ τ は decomposable τ 加 τ .

定理 4.10. $C_F(\Omega, H(\omega)) = H$: continuous field of Hilbert spaces.

A : densely defined s -closed operator in H

\Rightarrow

A : decomposable.

§ 5. 応用.

前節で densely defined s -closed operator は decomposable と
 なることを示した。逆に, $\{A(\omega)\}$ を closed operators の continuous
 field で各 $A(\omega)$ が densely defined であるならば $A = \{A(\omega)\}$
 は densely defined s -closed operator となる。

この節では densely defined s -closed operator には必ず
 polar decomposition があることを示す。その前に, densely def.
 self-adjoint, positive operator には必ず square
 root が存在することを示す。

補題 5.1. $H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces

A : densely defined s -closed operator.

\Rightarrow

A^*A : self-adjoint, positive; $A^*A = \{A(\omega)^*A(\omega)\}$.

定理 5.2.

$A = \{A(\omega)\}$: $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ 上 self-adjoint, positive operator

\Rightarrow

$\exists B = \{B(\omega)\}$: self-adjoint, positive, $B^2 = A$.

$\Sigma = \Sigma^*$. A^*A の square root $\in |A|$ と呼んで A の絶対値と云う。

すなわち、 A は densely defined s -closed operator $A = \{A(\omega)\}$ の polar decomposition を $A = V|A|$ と表す。

$A = \{A(\omega)\} : H = C_f(\Omega, H(\omega)) \mathbb{Z}''$ の densely defined s -closed operator A の時、 H の subset H_1, H_2 は次の様に定義される。

$H_1 =$ the closure of $\{ \sum e_\alpha |A| \xi_\alpha : \{ |A| \xi_\alpha \} \text{ is bounded, } \{ e_\alpha \} \subset C(\Omega)_p, \sum e_\alpha = 1 \}$

$H_2 =$ the closure of $\{ \sum e_\alpha A \xi_\alpha : \{ A \xi_\alpha \} \text{ is bounded, } \{ e_\alpha \} \subset C(\Omega)_p, \sum e_\alpha = 1 \}$

すなわち、 H_1, H_2 の両方は共に H の continuous submodule と成る。 $\forall E = (E_1, E_2) \in H \rightarrow H_i \wedge$ a projection E_i とし、次の様に operator V を定義する。

$$V : V'(\sum e_\alpha |A| \xi_\alpha) = \sum e_\alpha A \xi_\alpha$$

すなわち

$$\| \sum e_\alpha |A| \xi_\alpha \| = \sup \| e_\alpha |A| \xi_\alpha \| = \sup \| e_\alpha A \xi_\alpha \| = \| \sum e_\alpha A \xi_\alpha \|$$

従って、 V' は isometry と成る。今 V' の H_1 への extension $E \in V''$ とし、 $V = E_2 V' E_1$ とおくと、 V は initial domain E_1 , final domain E_2 $E \in V''$ partial isometry と成る。更に、定義から明かすに、 $A = V|A|$ と成る。

上の話の中で、Hilbert space K 上の operator theory と同様
 に、 $\mathcal{D}(|A|) = \mathcal{D}(A)$ なることを証明してやる。

以上の事より次の定理を得る。

定理 5.3.

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces.

$A = \{A(\omega)\}$: densely defined s -closed operator.

\Rightarrow

$\exists V$: partially isometrical operator, $A = V|A|$.

References.

- [1] A. Nuesbaum ; Duke Math. J., 31(1964), 33-44.
- [2] M. Stone ; J. of the Indian Math. Soc., 15(1951), 155-192.
- [3] H. Takemoto ; Michigan Math. J., 20(1973), 115-127.
- [4] I. Kaplansky ; Amer. J. Math., 75(1953), 839-858.