数理解析研究所講究録
第 213 巻 1974 年 104-122

右延長文法により生成される言語について

静大 工　　大芝 猛
九大 理　　有川節夫

alphabet $\Sigma=\{a_1,\ldots,a_n\}$ に対し次の $G=(\Sigma, S, P)$ を Σ の上の右延長文法という、即ち S は Σ^* の有限部分集合(axioms), P は $\Sigma^* \times (\Sigma^* - \{\lambda\})$ の有限部分集合 (production rules).

(i) P の rules の適用について関係 $\underset{P}{\Rightarrow}$ は「任意の $\langle x,y\rangle \in P$, $w_i \in \Sigma^*$ について $w_1 x w_2 \underset{P}{\Rightarrow} w_1 x y w_2$」によって定め、

(ii) $\overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}}$ は $\underset{P}{\Rightarrow}$ の reflexive, transitive closure とする。

$L(G)=\{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in S,\ u \overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} w\}$ を G の定める右延長言語という。

右延長言語について以下の結果が成立する.

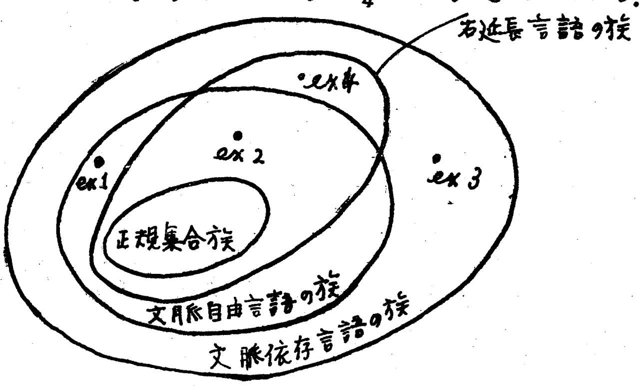
1 $\Sigma=\{a_1\}$ のとき右延長言語の族は $\Sigma=\{a_1\}$ の上の正規集合族と一致する.

2 $\#(\Sigma)\geqq 2$ のとき、右延長言語の族は正規集合族を真部分に含み、左片側文脈依存言語の族(従って文脈依存言語の族)に真部分に含まれる。

3° $\#(\Sigma)\geqq 2$ のとき、右延長言語の族と文脈自由言語の族は互に他の部分ではない。

下図の関係が成立し、マークされた部分の例としては

ex.1; $L_1=\{a^n b^n \mid n\geqq 1\}$, ex.2: L_2: a,b からなるDyck 言語, ex.3: $L_3=\{a^n b^n c^n \mid n\geqq 1\}$, ex.4: ある homomorphism φ, ある正規集合 C を用いて $\varphi(L_4\cap C)=\{a^n b^n c^k \mid n\geqq 1,\ n\geqq k\geqq 0\}$ なる $L_4=L(G)$ が Proposition 3 で与えられ、更にある homomorphism ψ によって $\psi(L_4) = L_4' = L(G')\subseteq\{0,1\}^*$ なる L_4' が与えられる。



§ 1　正規集合との関係

更に $G=(\Sigma,S,P)$ の rules P の適用を左端のみに制限してうる言語 $R(G)=\{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in S,\ u \overset{*}{\underset{R}{\Rightarrow}} w\}$ を次のように定義する。

$v,z\in\Sigma^*$ に対し $v \underset{R}{\Rightarrow} z$ は「$\exists x,y\ v'\in\Sigma^*,\ v=xv',\ z=xyv',\ \langle x,y\rangle\in P$」とし $\overset{*}{\underset{R}{\Rightarrow}}$ は $\underset{R}{\Rightarrow}$ の reflexive, transitive closure とする。

[Proposition 1] 任意の正規集合 $R = T(A)$,($A=(K,\Sigma,\delta,q_0,F)$ 有限オートマトン) に対し $T(A) = R(G_A) = L(G_A)$ なる右延長文法

$G_A = (\Sigma, S, P)$ あり，(但し K: 内部状態の集合，$q_0 \in K$ 初期状態，F：最終状態，δ 決定論的遷移関数)

(証明) $\#(K)=m$ とし，$S = \{w \in T(A) \mid |w| < m^m\}$

$$P = \{\langle x,y \rangle \mid x \equiv xy,\ |xy| \leqslant m^m,\ |y| \neq 0,\ x,y \in \Sigma^*\}$$

$G_A = (\Sigma, S, P)$ とする 但し $u,v \in \Sigma^*$ に対し同値関係

$u \equiv v$ を「$\forall q \in K,\ \delta(q,u) = \delta(q,v)$」と定義する。

∘ $R(G_A) \subseteq L(G_A) \subseteq T(A) = R$ は明らか故

∘ $R = T(A) \subseteq R(G_A)$ のみを示せばよい

「$w \in R \rightarrow w \in R(G_A)$」を $|w|$ に関する帰納法により示す：

(case 1) $|w| < m^m$: $w \in S \subseteq R(G)$

(case 2) $|w| \geqslant m^m$: $w = a_{i_1} \ldots a_{i_{|w|}}$ $(a_{i_j} \in \Sigma)$

$a_{i_1} \ldots a_{i_p} = x_p$ $(0 \leqslant p \leqslant |w|)$ とする $x_0, x_1, \ldots, x_{m^m}$ の中に同値なるものあり、$x_k \equiv x_{k+l}$ $(0 \leqslant k < k+l \leqslant m^m)$ とする.

$a_{i_{k+1}} \ldots a_{i_{k+l}} = y$ とおくと $x_k \equiv x_k y$, $|y| \neq 0$ $\langle x_k, y \rangle \in P$

一方 $w = x_k y v' \equiv x_k v'$ $x_k v' \in T(A) = R$, $|x_k v'| < |w|$

帰納法の仮定より $x_k v' \in R(G_A)$ $\therefore$ $w = x_k y v' \in R(G_A)$

[系 1] 族 $\{R(G) \mid G$ は Σ 上の右延長文法$\}$ は Σ 上の正規集合の族と一致する.

(証明) Proposition 1 より任意の右延長文法 $G = (\Sigma, S, P)$ についで $R(G)$ が正規集合となることを示せばよい.

$G=(\Sigma,S,P)$ に対し $\underline{R}(G) = T(A_G)$ なる非決定論的 λ input タイプの有限オートマトン $A_G=(K,\Sigma,\delta,q_0,F)$ あり.

即ち $\max(\max_{\langle x,y\rangle\in P}|xy|, \max_{u\in S}|u|+1) = k$ とし

$K = \bigcup_{l=0}^{k}\Sigma^{l} = \{a_{i_1}\ldots a_{i_l} \mid 0\leq l\leq k, a_{i_j}\in\Sigma\ (j=1,\ldots,l)\}$

$q_0=\lambda\in K$, $F=S$, とする.

δ は次の２つのタイプのものからなる：

(1) $\delta(xyv,\lambda)\ni xv$ (for each $x,y,v\in\Sigma^*$, $\langle x,y\rangle\in P$, $|xyv|\leq k$)

(2) $\delta(x,a)\ni xa$ (for each $x\in\Sigma^*$, $|x|<k$, $a\in\Sigma$)

(i) $R(G)\subseteq T(A\ )$ については： $w=a_{i_1}\ldots a_{i_m}\in\Sigma^*$ に対し

$$w^{(k)}=\begin{cases} a_{i_1}\ldots a_{i_k} & (\text{if } m>k)\\ a_{i_1}\ldots a_{i_m} & (\text{if } m\leq k)\end{cases},\quad w^{(k)}\backslash w=\begin{cases} a_{i_{k+1}}\ldots a_{i_m} & (\text{if } m>k)\\ \lambda & (\text{if } m\leq k)\end{cases}$$

とし、A に対して状態 q, input x の計算状況を (q,x) とすれば、一般に "$u \underset{R}{\Rightarrow} w$ ならば $(w^{(k)},w^{(k)}\backslash w)\ \vdash_A^{*}\ (u^{(k)},u^{(k)}\backslash u)$ " が成立する。従って $w\in R(G)$ 即ち $S\ni u \overset{*}{\underset{R}{\Rightarrow}} w$ のとき $(q_0,w)=(\lambda,w)\ \vdash_A^{*}$ $(w^{(k)},w^{(k)}\backslash w)\ \vdash_A^{*}\ (u^{(k)},u^{(k)}\backslash u) = (u^{(k)},\lambda)$. 即ち $w\in T(A_G)$.

(ii) $T(A\ )\subseteq R(G)$ については：「$w\in T(A_G)$ ならば $w\in R(G)$」を $|w|$ に関する帰納法により容易に示しうる。

[系2] $\#(\Sigma)=1$ のとき $\{L(G) \mid G\ \Sigma$ の上の右延長文法$\}$ は正規集合族と一致する

(∵) $\#(\Sigma)=1$ のとき Σ の上の任意の右延長文法につき

$L(G) = R(G)$ が成立する.

§2 文脈依存言語，文脈自由言語との関係

[Proposition 2] 右延長言語は左片側文脈依存言語であり従って文脈依存言語である。

[Lemma] $L(G)$; $G=(\Sigma,S,P)$ に対し $L(G)=L(G')$; $G'=(\Sigma,S',P')$, 「P' は $\langle\lambda,v\rangle$, $\langle u,\lambda\rangle$ なる要素をもたない」なる G' あり.

(証明) $P=P_1\cup P_2$, $P_1=\{\langle x_i,y_i\rangle \mid i=1,\ldots,p\}$, $x_i\neq\lambda$, $y\neq\lambda$

$P_2=\{\langle\lambda,v_j\rangle \mid j=1,\ldots,q\}$ $v_j\neq\lambda$ とおける.

$P'=P_1\cup P_2'$, $P_2'=\{\langle a,v_j\rangle \mid a\in\Sigma\ ,j=1,\ldots,q\}$

$S'=S\cup\{v_j u \mid j=1,\ldots,q,\ u\in S\}$, $G'=(\Sigma,S',P')$とする.

∘ $L(G')\subseteq L(G)$ は明らか.

$L(G)\subseteq L(G')$ について: 任意の $w\in L(G)$ に対して導出 $S\ni u\overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} w$ の中において

(case 1) $P_2\ni\langle\lambda,v_j\rangle$ のルールの左端での適用がないとき: P_2 の適用は P_2' の適用とみなせる. 従って, $S'\supseteq S\ni u\overset{*}{\underset{P'}{\Rightarrow}} w$ ∴ $w\in L(G')$

(case 2) P_2 の左端における適用があるとき: その最終のもの $\langle\lambda,v\rangle$の適用をマークする: $S\ni u\overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} u_1 \underset{P_2}{\Rightarrow} vu_1\overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}}w$ 従って $S'\ni vu\overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} vu_1\overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} w$ が成立. これに P_2 の左端適用は現れない.

従って $S'\ni vu\overset{*}{\underset{P'}{\Rightarrow}} w$ 即ち $w\in L(G')$.

(Proposition 2 の証明) 右延長言語 $L=L(G)$; $G=(\Sigma,S,P)$ に対し前Lemma より $P=\{\langle u_i x_i ,v_i\rangle \mid i=1,\ldots,k\}$ とおける.

但し $x_i \in \Sigma$, $u_i \in \Sigma^*$, $v_i \in \Sigma^+$ $(i=1,\dots,k)$.

こゝで $V_N = \{X_0\} \cup \{X_a \mid a \in \Sigma\}$, $V_T = \Sigma$ とし

$\psi(a) = X_a$ (for each $a \in \Sigma$) によって $V_T = \Sigma$ から V_N への準同型を定める: $P' = P'_0 \cup P'_1 \cup P'_2$, $P'_0 = \{X_0 \to \psi(u) \mid u \in S\}$,

$P'_1 = \{\psi(u_i)X_{x_i} \to \psi(u_i)X_{x_i}\psi(v_i) \mid i=1,\dots,k\}$, $P'_2 = \{X_a \to a \mid a \in \Sigma\}$

とすると $G' = (V_N, V_T, P', X_0)$ は1つの左片側文脈依存文法を与える, G' によって定義される phrase structure 言語 L(G') は右延長言語 L(G) と一致することは容易に確かめうる。

- $\#(\Sigma) \geqslant 2$ のとき、正規言語でない右延長言語としては: Dyck 言語 $L(G_D)$ がある。即ち $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ に対して $G_D = (\Sigma, S_D, P_D)$, $P_D = \{\langle a_1, a_1 a_2\rangle, \langle a_2, a_1 a_2\rangle\}$, $S_D = \{\lambda, a_1 a_2\}$.
- $\#(\Sigma) \geqslant 2$ のとき 右延長言語の族は文脈自由言語の族と互に他の部分ではない。これは $\{a_1^n a_2^n \mid n \geqslant 1\}$ が右延長言語ではないこと。と次の Proposition 3 とによる。

[Proposition 3] 右延長言語で文脈自由ではないものあり 下記の L(G) はその例を与える

$G = (\Sigma, S, P)$; $\Sigma = \{a, b, c, a', f, X, Y, \bar{X}\}$,

$S = \{cab\bar{X}\bar{X}\}$, $P = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6$:

$P_0 = \{\langle c, cab\rangle\}$, $P_1 = \{\langle a, fa'bba'\rangle\}$, $P_2 = \{\langle a, fa'ba'\rangle\}$,

$P_3 = \{\langle bb\alpha b, b\rangle \mid \alpha \in \{a, a'\}\}$, $P_5 = \{\langle \alpha_1 b\, \alpha_2 b, a'\rangle \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \{a, a'\}\}$,

$P_4 = \{\langle bb\alpha b, bY\rangle \mid \alpha \in \{a, a'\}\}$, $P_6 = \{\langle \alpha_1 b\, \alpha_2 b, X\rangle \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \{a, a'\}\}$

これが文脈自由でないことを示すために次の正規集合 C と準同型 φ とを考え、

$\varphi(L(G) \cap C) = \{c^n a^n X^k \mid n \geq 1,\ n \geq k \geq 0\}$ なることを示す。

このとき、右辺は文脈自由ではない※故 $L(G)$ も同様となる。

但し $C = C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3$ はパターンの制限を与える。

即ち $C_0 = \Sigma^* - \Sigma^* a \Sigma^* c \Sigma^*$ (a のあとに c のある語を除く)

$C_1 = \Sigma^* - \Sigma^* a'(\Sigma - \{b\})\Sigma^*$ (a' のあとは b のみ)

$C_2 = \Sigma^* - \Sigma^* Y(\Sigma - \{X, \bar{X}\})\Sigma^*$ (Y のあとは X または $\bar{X}$)

$C_3 = \Sigma^* - \Sigma^* X(\Sigma^* - bY\Sigma^*)$ (X のあとは bY が続く),

φ は $\begin{cases} \varphi(x) = x \quad (x = c, a, X), \quad \varphi(Y) = X, \\ \varphi(a') = \varphi(b) = \varphi(f) = \varphi(\bar{X}) = \lambda \end{cases}$ と定義する。

以下で $L_1 = L(G) \cap C$ とおき、$\varphi(L_1) = L_2 = \{c^n a^n X^k \mid n \geq 1, n \geq k \geq 0\}$ を示す。

(Part 1) $L_2 \subseteq \varphi(L_1)$ について：各 $n \geq 1$ 各 $p\ (n \geq p \geq 0)$ に対して次の形の $w_{n,p}$ が $L_1 = L(G) \cap C$ に属することを確かめうる。

$$w_{n,2k} = c^n \left(\prod_{i=1}^{k} af(a'bb)^{n_{2i-1}} af(a'b)^{n_{2i}}\right) \cdot \left(\prod_{j=2k+1}^{n} ab(a'b)^{n_j}\right)(XbY)^k \bar{X}\bar{X}$$

$$w_{n,2k+1} = c^n \left(\prod_{i=1}^{k} af(a'bb)^{n_{2i-1}} af(a'b)^{n_{2i}}\right) \cdot af(a'bb)^{n_{2k+1}} \left(\prod_{j=2k+2}^{n} abb(a'bb)^{n_j}\right) Y(XbY)^k \bar{X}\bar{X} .$$

(注)※ Salomaa. Formal Languages. p.102(Academic Press 1973)等参照.

従って $\varphi(w_{n,p}) = c^n a^n X^p \in \varphi(L(G) \cap C)$.

(Part 2) $\varphi(L_1) \subseteq L_2$: 次のような挿入文法 $G'=(\Sigma, S, P')$ が存在することから示される.

(A) $L_1 = L(G) \cap C \subseteq L(G')$

(B) $\varphi(L(G')) \subseteq L_2 \equiv \{ c^n a^n X^k \mid n \geq 1, n \geq k \geq 0 \}$

但し $P' = P'_0 \cup P'_1 \cup P'_2 \cup P'_3 \cup P'_4 \cup P'_5 \cup P'_6$, P'_i は P_i に関連して次のように定義される:

$P'_0 = \{ \langle c, cab, a \rangle \}$, $P'_1 = \{ \langle a, fa'bba', b \rangle \}$, $P'_2 = \{ \langle a, fa'ba', b \rangle \}$,

$P'_3 = P_3 \equiv \{ \langle bb\alpha b, b \rangle \mid \alpha \in \{a, a'\} \}$,

$P'_4 = \{ \langle bb\alpha b, by, \zeta \rangle \mid \alpha \in \{a, a'\}, \zeta \in \{X, \bar{X}\} \}$,

$P'_5 = \{ \langle \alpha_1 b \alpha_2 b, a', b \rangle \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \{a, a'\} \}$,

$P'_6 = \{ \langle \alpha_1 b \alpha_2 b, X, bY \rangle \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \{a, a'\} \}$.

(ここで挿入文法 $G=(\Sigma, S, P)$ とは右延長文法の拡張として P は $\Sigma^* \times (\Sigma^* - \{\lambda\}) \times \Sigma^*$ の有限部分集合として定義し、このとき $L(G)$ は右延長言語と同様に S の語から productions $uxzv \Rightarrow uxyzv$; ($\langle x, y, z \rangle \in P$, $u, v \in \Sigma^*$) の有限回をほどこしてうる語の全体と定義する.)

(A の証明) (A)は $L(G)$ w の"パターンの制限 $w \in C$ "が"導出に用いられるルール P の P' へ制限"を導くことを主張するものである。 即ち導出 $cab\bar{X}\bar{X} \overset{*}{\Rightarrow} w$ において P のルールは P' の形でのみ用いうることを示す。

(0) $P_0 \ni \langle c, cab \rangle$ の適用をマークする : $u, v, v_i, w_i \in \Sigma^*$, $\xi \in \Sigma$

として、$cab\bar{X}\bar{X} \overset{*}{\Rightarrow} ucv = uc\xi v_2$ (∵ $v = v_1 \bar{X}\bar{X}$, $|v| \geq 2$)
$= \xi v_2$ とおける.

$\underset{P_0}{\Rightarrow} ucc\underline{a}b\underline{\xi} v_2 \overset{*}{\Rightarrow} w_1 \underline{a} w_2 \underline{\xi} w_3 = w$

先づ一般に $uc\xi v_1 \in L(G)$ ならば c の右隣りの ξ は a or c.

また $w \in L_1 \subseteq C_0 = \Sigma^* - \Sigma^* a \Sigma^* c \Sigma^*$ より a の右の $\xi \neq c$, ∴ $\xi = a$.

P_α は $u\underline{c}\underline{a}v_2 \underset{P}{\Rightarrow} u\underline{c}cab\underline{a}v_2$ の形、即 P_0' の形で用いられる。

(1) $P_1 \ni \langle a, fa'bba', a' \rangle$ の適用をマーク:

$cab\bar{X}\bar{X} \overset{*}{\Rightarrow} uav = u\underline{a}\underline{\xi}v_1 \underset{P_1}{\Rightarrow} u\underline{a}\underline{fa'bba'}\underline{\xi}v_1 \overset{*}{\Rightarrow} w_1 a'\xi w_2 = w$

(∵ P が ⟨...a',...⟩ の形のルールを含まぬ故 a'ξ は不変.)

$w \in C_1$ より a' の直後は b. ∴ ξ=b 故に P_1 は P_1' として適用

(2) P_2 は P_2' としてのみ用いられることは(1)と同様.

(3) $P_3 = P_3'$

(4) $P_4 \ni \langle bb\alpha b, bY \rangle$ の適用をマーク :(1)と同様 Yξ が P で不変なることに注意し、$cab\bar{X}\bar{X} \overset{*}{\Rightarrow} ubb\alpha bv = u\underline{bb\alpha}b\underline{\xi}v_1 \underset{P_4}{\Rightarrow} u\underline{bb\alpha}b\underline{bY}\underline{\xi}v_1$

$= w_1 Y\xi w_2 = w \in L_1 \subseteq C_2$

∴ $\xi = X$ or $\bar{X}$ ∴ P_4 は P_4' としてのみ適用される。

(5) P_5 についても(1)同様 P_5' としてのみ適用される.

(6) $P_6 \ni \langle \alpha_1 b\alpha_2 b, X \rangle$ の適用をマーク : Xξ が P で不変であることに注意 $cab\bar{X}\bar{X} \overset{*}{\Rightarrow} u\alpha_1 b\alpha_2 bv = u\underline{\alpha_1 b\alpha_2 b}\underline{\xi\eta}v_1$ (∵ $|v| \underline{\geq 2}$)

$\underset{P_6}{\Rightarrow} u\underline{\alpha_1 b\alpha_2 b}\underline{X}\underline{\xi\eta}v_1 \overset{*}{\Rightarrow} w_1 X\xi\eta' w_2 = w \in C_3$

∴ $\xi\eta' = bY$ ∴ $\xi = b$, $\eta' = Y$ 更に Xb も P で不変 ∴ $\eta = \eta' = Y$

従って P_6 も P_6' としてのみ用いられる.

（B の証明） 下記の Lemma (1)—(5) から

「任意の $w \in L(G')$ について,

$$\left.\begin{array}{l} w \in c^*c\{a,a'b,f\}^*\{X,bY\}^*\bar{X}\bar{X} \\ \#_c(w) = \#_a(w) \geqq \#_{XY}(w) \end{array}\right\}$$

が示され

一方 φ により a, c, X はそのまゝ残り, Y は X に, 他の記号は消去される故 $\varphi(w)=c^{n+1}a^{n+1}X^k \in L_2$ 即ち $\varphi(L(G')) \subseteq L_2$.

[Lemma] $w \in L(G')$ に対して

(1) w の中の $\alpha \in \{a,a'\}$ の直後の記号は b または f.

(2) w の中の f は uafa'bv の形でのみ現われる.

(3) $w \in c^*c\{a,a',b,f\}^*((XbY)^* \cup bY(XbY)^*)\bar{X}\bar{X}$

特に w が f を含まぬなら $w=c^{n+1}(ab)^{n+1}\bar{X}\bar{X}$ $(n \geqq 0)$

(4) $\#_c(w) = \#_a(w) \geqq \#_f(w)$

(証明) (1),(2),(3)と(4)の前半は w の導出ステップ数に関する帰納法により容易. (4)の後半は(2)の「f は a の直後に高々1回のみ現われうる」ことを導びく故明らかである。

下の Lemma(5) は（a の直後に高々1つ現われうる）f 1つが右の $\{X,bY\}^*$ のブロックに高々1つの X or Y を発生させうることを示すもので、これには左の情報を右方へ移動させる手段として α(a or a') と b とからなる2種類のパターンが利用される。Lemma(5)で用いられる2つの定義を述べる:

(定義 1) $w \in L(G')$ に対し $s(w)$ を次のように定義する:

(i) w が f を含まぬとき $w=c^{n+1}(ab)^{n+1}\bar{X}\bar{X}$; $s(w) = (ab)^{n+1}$

(ii) w が f を含むとき、最も右の f と最も左の X or Y or $\bar{X}$ ではさまれる w の部分語 ($\in\{a,a',b\}^*$) を $s(w)$ とする。即ち

このとき Lemma (2),(3) より $w = c^{n+1}uf\,s(w)v\bar{X}\bar{X}$

$u \in\{a,a',b,f\}^*$, $v \in (XbY)^* \cup Y(XbY)^*$

$s(w) = \alpha_1 b^{n_1} \alpha_2 b^{n_2} \ldots \alpha_k b^{n_k}$ $(n_i \geqq 1,\ \alpha_i \in \{a,a'\}\ i=1,\ldots,k)$.

(定義 2) $w \in L(G')$ の部分語で $v=\alpha_1 b^{n_1}\alpha_2 b^{n_2} \ldots \alpha_k b^{n_k}$,

$\alpha_i \in\{a,a'\}$, $n_i \geqq 1$ なるものについて.

$N(v) =$ (列 $h(n_1)\ h(n_2)\ \ldots\ h(n_k)$ の記号変化の個数)

と定義する. 但し $h(n) = 1\ (n=1)$, $h(n) = 2\ (n \geqq 2)$. とする.

[Lemma (5)] 任意の $w \in L(G')$ に対して

$\#_f(w) \geqq N(s(w)) + \#_{X,Y}(w)$ が成立する。

(証明)。$w=cab\bar{X}\bar{X} \in S$ については明らかに成立.

○ w について成立を仮定し $w \underset{P'}{\Rightarrow} w'$ なる w' についての成立を示せばよい: w が f を含むか否かのそれぞれの場合に適用されうるルールの種類によって cases を分類し確かめる.

1. w が f を含まないとき Lemma(3) より $w=c^{n+1}(ab)^{n+1}\bar{X}\bar{X}$ 故に適用可能なルールは P'_0, P'_1, P'_2 のみ.

1.0 P'_0 適用のとき: $w'=c^{n+2}(ab)^{n+2}\bar{X}\bar{X}$, $s(w') = (ab^1)^{n+2}$

$N(s(w'))=$ (列 1^{n+2} の記号変化の数) $= 0$

一方 $\#_f(w') = \#_{XY}(w') = 0$ 故成立.

1.1 $P'_1 \ni \langle a, fa'bba', b \rangle$ 適用のとき:

$$w' = c^{m+1}(ab)^k af\underbrace{a'bba'b(ab)^{m-k}}_{s(w')}\bar{X}\bar{X}, \quad s(w') = a'bba'b(ab)^{m-k};$$

$N(s(w')) = (2\cdot 1^{m-k-1}$ の記号変化の数$) = 1$, $\#_f(w') = 1$

$\#_{XY}(w') = 0$ 故に成立.

1.3 $P'_2 \ni \langle a, fa'ba' \rangle$ 適用のとき: $w' = c^{m+1}(ab)^k af\underbrace{a'ba'b(ab)^{m-k}}_{s(w')}\bar{X}\bar{X}$

$\#_f(w')=1$, $N(s(w'))=0$, $\#_{XY}(w')=0$ より成立.

2. w が f を含むとき:

$\underline{w=c^{m+1}uf\,s(w)v\bar{X}\bar{X},\ u\in\{a,a',b,f\}^*,\ v\in(XbY)^*\cup Y(XbY)^*,}$

$\underline{s(w) = \alpha_1 b^{n_1}\ldots\alpha_k b^{n_k} \quad (n_i \geq 1,\ \alpha_i\in\{a,a'\})}$

2.0 $P'_0 \ni \langle c, cab, a \rangle$ 適用のとき.

$w'=c^{m+2}abuf\,s(w)vXX$, $s(w')=s(w)$ $\quad N(s(w'))=N(s(w))$

一方 $\#_f(w')$, $\#_{XY}(w')$ も w と変らない故, w' について成立.

2.1 $P'_1 \ni \langle a, \underline{fa'bba'}, b \rangle$ 適用のとき:

2.1.1 u の中の a に適用のとき $s(w')=s(w)$ $\therefore N(s(w'))=N(s(w))$

$$\#_{XY}(w')=\#_{XY}(w),\ \#_f(w')>\#_f(w)\geq N(s(w))+\#_{XY}(w)=N(s(w'))+\#_{XY}(w')$$

2.1.2 $s(w)$ の中の $\alpha_p = a$ に適用の場合: $s(w)=w_1ab^{n_p}w_2$

$w'=c^{m+1}ufw_1af\underline{a'bba'b^{n_p}w_2}v\bar{X}\bar{X}$, $s(w')=\underline{a'bba'b^{n_p}w_2}$;

$N(s(w'))\leq N(a'b^{n_p}w_2)+1\leq N(s(w))+1$ $\quad$ 一方 $\#_{XY}(w')=\#_{XY}(w)$

$$\#_f(w')=\#_f(w)+1\geq (N(s(w))+\#_{XY}(w))+1\geq N(s(w'))+\#_{XY}(w')$$

2.2 $P'_2 \ni \langle a, \underline{fa'ba'}, b \rangle$ 適用の場合 P'_1 の場合と同様.

2.3 $P_3' = P_3 \ni \langle bb\alpha b, \underset{\cdots}{b} \rangle$ 適用の場合

2.3.1 u の中の bbαb に適用されるとき: 2.0 の場合と同様.

2.3.2 $\mathscr{s}(w)$ の中で適用の場合: $\mathscr{s}(w) = \alpha_1 b^{n_1} \ldots \alpha_k b^{n_k} = w_1 bb\alpha_p bw_2$,

$\therefore p \geq 2, n_{p-1} \geq 2, n_i \geq 1 (i=1,\ldots,k)$, $w' = c^{m+1}\underline{ufw_1 bb\alpha_p b\underline{b}w_2}\, v\bar{X}\bar{X}$, $\mathscr{s}(w') = w_1 bb\alpha_p bbw_2$

このとき $\begin{cases} h(n_i') = h(n_i) & (i=1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,k) \\ h(n_{p-1}') = h(n_{p-1}) = 2 & \\ h(n_p') = h(n_p+1) = 2 \geqslant h(n_p) & \end{cases}$ である.

更に case (i): $p < k$, $h(n_p)=2$; $N(\mathscr{s}(w')) = N(\mathscr{s}(w))$

(ii) " , $h(n_p)=1$, $h(n_{p+1})=1$; " " " "

(iii) " , " , $h(n_{p+1})=2$; $N(\mathscr{s}(w')) = N(\mathscr{s}(w)) - 2$

(iv): $p=k$, $h(n_p)=2$; $N(\mathscr{s}(w')) = N(\mathscr{s}(w))$

(v): " , $h(n_p)=1$; $N(\mathscr{s}(w')) = N(\mathscr{s}(w)) - 1$

従って (i) — (v) のいずれにしても $N(\mathscr{s}(w')) \leqslant N(\mathscr{s}(w))$ − 3 $\#_f, \#_{XY}$ は不変故成立.

2.4 $P_4' \ni \langle \underline{bb\alpha b}, \underline{b}\underset{\cdots}{Y}, \underline{X} \rangle$ の適用の場合.

$\mathscr{s}(w) = \alpha_1 b^{n_1} \ldots \alpha_k b^{n_k} = w_1 bb\alpha_k b$, $n_{k-1} \geqslant 2$, $n_k = 1$, $v = Xv_1$

$w = c^{m+1} ufw_1 \underline{bb\alpha_k b\underline{X}v_1}\, \bar{X}\bar{X}$

$w' = c^{m+1} \underline{ufw_1 \underline{bb\alpha_k bb}}\underline{YX}v_1 \bar{X}\bar{X}$ $n_{k-1}' \geqslant 2$, $n_k' = 2$

$\mathscr{s}(w') = w_1 bb\alpha_k bb$ $\begin{cases} h(n_i') = h(n_i) & (i=1,\ldots,k-1) \\ h(n_{k-1}') = h(n_{k-1}) = 2 & \\ h(n_k') = 2 > h(n_k) = 1 & \end{cases}$

$N(s(w'))=N(s(w))-1,\quad \#_{XY}(w')=\#_{XY}(w)+1.$

$\#_f(w')=\#_f(w) \geqslant N(s(w))+\#_{XY}(w)=N(s(w')+\#_{XY}(w')$

2.5 $P'_5 \ni \langle \alpha_1 b\, \alpha_2 b, a', b \rangle$ の適用の場合.

2.5.1 $w=c^{m+1}\, uf\, s(w) v\bar{X}\bar{X}$ の u の中の $\alpha_1 b\, \alpha_2 bb$ に適用の場合 は 2.0 と同様.

2.5.2 $s(w)=w_1 \underline{\alpha_p b\, \alpha_{p+1} b}\ \underline{b}w_2$ の中で適用される場合: $n_p=1$, $n_{p+1} \geqslant 2$, $w'=c^{m+1} uf\underline{w_1 \alpha_p b \alpha_{p+1} b a' b w_2} v\bar{X}\bar{X}$, $s(w')=w_1\, \alpha_p\, b\alpha_{p+1} ba' bw_2$

$$\left\{\begin{array}{l} h(n'_i)=h(n_i) \quad (i=1,\ldots,p) \\ h(n'_p)=h(n_p)=1 \\ h(n'_{p+1})=1 \\ h(n'_{p+2})=h(n_{p+1}-1),\ h(n_{p+1})=2 \\ h(n'_j)=h(n_{j-1}) \quad (j=p+3,\ldots,k+1) \end{array}\right.$$

case (i); $p+1<k$, $h(n'_{p+3})=2$; $N(s(w')=N(s(w))$

(ii): " " , $h(n'_{p+3})=1$, $h(n'_{p+2})=2$; " " "

(iii): " , " , $h(n'_{p+2})=1$; $N(s(w'))=N(s(w))-2$

(iv): $p+1=k$, $h(n'_{p+2})=2$; $N(s(w'))=N(s(w))$

(v): " , $h(n'_{p+2})=1$; $N(s(w'))=N(s(w))-1$

従って (i) — (v) のいずれのときも, $\underline{N(s(w')) \leqslant N(s(w))}$ 一方 $\#_f$, $\#_{XY}$ は不変故 w' についても成立.

2.6 $P'_6 \ni \langle \alpha_1 b\, \alpha_2 b, X, bY \rangle$ の適用の場合.

$w=c^{m+1} uf\underbrace{w_1\, \underline{\alpha_{k-1} b\, \alpha_k bbY}}_{s(w)} v_1 \bar{X}\bar{X}$, $s(w)=w_1\, \alpha_{k-1}\, b\alpha_k bb$, $v=Yv_1$

$w' = c^{m+1} u f \underbrace{w_1 \alpha_{k-1} b \alpha_k b}_{s(w')} X b Y v_1 \bar{X}\bar{X}$, $s(w') = w_1 \alpha_{k-1} b \alpha_k b$, $v = \underline{XbYv_1}$

$\underline{N(s(w')) = N(s(w)) - 1}$, $\underline{\#_{XY}(w') = \#_{XY}(w) + 1}$

$\therefore \quad \#_f(w') = \#_f(w) \geqq N(s(w)) + \#_{XY}(w) = N(s(w')) + \#_{XY}(w')$.

§ 3. Left to right 導出への標準化について.

前節で調べたように右延長言語 L(G) は文脈自由であるとはかぎらない、しかし Proposition 2 の Lemma に示したように $G=(\Sigma, S, P)$ の P は $<\lambda, u>$ を含まない形に reduce してあれば、その任意の導出はある意味で左から右へ実行するように実行順序を整理することが可能である。Proposition 4, と 5 はこのことに関連した性質をまとめたものである。

先ず実行順序の変更が可能な場合を例によって示す：

$w \in L(G)$ の1つの導出 $S \ni u \overset{*}{\Rightarrow} w$ につき

production $\wp_1$: $uxv \Longrightarrow uxyv$ の実行後に実行される

" " $\wp_1$: $u_1 x_1 v \Rightarrow u_1 x_1 y_1 v_1$ について

$\wp_1$ が $\wp$ に直接つながる枝であるとは x_1 の右端の文字 ξ_1 ($x_1 = x_1' \xi_1$; この ξ_1 を $\wp_1$ の main 記号 という) が

(i) $\wp$ の xy ($\wp$ の main word という) の中ですでに現れて

(ii) $\wp_1$ と $\wp$ との中間の productions の main words の中には現

われていない場合をいう。図1の $\wp_1$, $\wp_2$ は $\wp$ に直接つながる枝であり、$\wp'$ は $\wp_2$ に直接つながるが $\wp$ や $\wp_1$ には直接つながらない。

$\wp$ に直接つながる2つの枝 $\wp_1$, $\wp_2$ について、それぞれの main 記号を ξ_1, ξ_2 とする。$\wp$ の main word の中において、ξ_2 が ξ_1 の左にあれば $\wp_2$ は $\wp_1$ の左にあるという。このとき次の結果が成立つ。

- $\wp_2$ が $\wp_1$ の左にあれば $\wp_2$ を $\wp_1$ より先に実行しうる(図1)。
- $\wp_2$ が $\wp_1$ の右にあるときは $\wp_2$ を $\wp_1$ より先に実行しうるとはかぎらない。(図2)

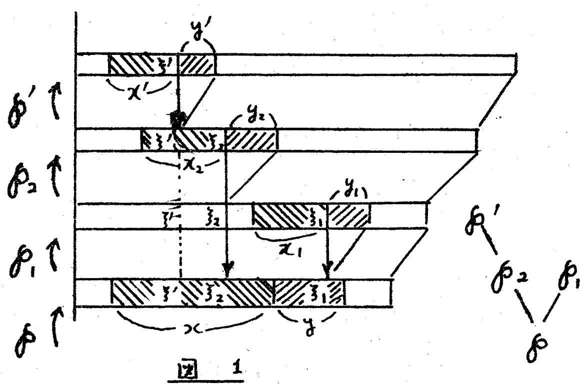


図 1

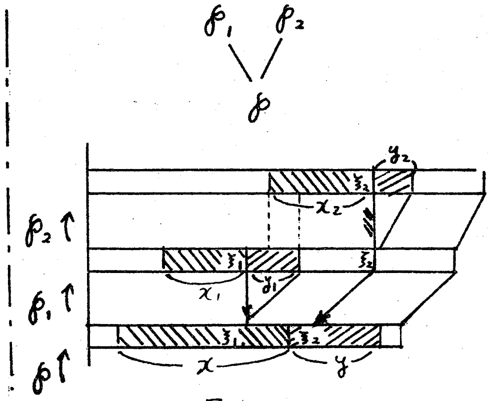


図 2

以上のことを一般化すれば、1つの導出 $\mathcal{D}$ が与えられれば、そのすべての productions に(直接つながる枝)の関係によって tree 型の半順序を導入し、更に"根元より枝が後""左の枝より右の枝があと"の順序により導入される線形順序

によってすべての productions を並べかえ $\mathcal{D}$ と同じ語を生成する（ left to right ）の導出 $\mathcal{D}'$ をうることが出来る。正確には以下の通りである。

前節 Lemma に従い与えられた右延長言語 $L=L(G)$, $G=(\Sigma, S, P)$ の P は $\langle\lambda, u\rangle$ タイプを含まないよう標準化してあるとする。$\max_{\langle x,y\rangle\in P}|xy| = p$ とし $\{1,\dots,p\} = N_p$ とする。

$N_p^* = \{\alpha_1\dots\alpha_k \mid k \geqslant 0,\ \alpha_i \in N_p\}$ によって p-分岐tree の nodes を表す。

特に $\lambda \in N_p^*$ を root と呼ぶ。

$\gamma, \delta \in N_p^*$, $d \in N_p$ に対し

- γd を node γ の上の左から d 番目の node
- $\gamma\delta \geqslant \gamma$ によって"より先端"なる半順序を表わす。

N_p^* の $d_1\dots d_k$ $(k \neq 0)$ を k桁p+1進小数 $0.d_1\dots d_k$ とみなし、

λ を0 とみなして導入される線形順序を $\succcurlyeq$ で表わす。

この $>$ は tree の nodes について left to right の順序づけを行っている。

$G=(\Sigma, S, P)$ の1つの導出 $D: S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_r = w$

($w_i = u_i x_i v_i \Rightarrow u_i x_i y_i v_i = w_{i+1}$, $\langle x_i, y_i\rangle \in P$ $(i=1,\dots,r-1)$) について、

各production(n,m)（第 n 語 w_n の左から第 m 番目の記号の位置）に次の g_D によって N^* の要素としての node $g_D(n,m)$ を対応させる。（g_D を g と略記）

- $g(1,m) = m$

- $g(n,m) = \begin{cases} g(n-1,m) & ; \text{ if } m \leq |u_{n-1}| \\ g(n-1, |u_{n-1}x_{n-1}|) \overset{※}{,} (m-|u_{n-1}|) & ; \text{ if } |u_{n-1}| < m \leq |u_{n-1}x_{n-1}y_{n-1}| \\ g(n-1, m-|y_{n-1}|) & ; \text{ if } |u_{n-1}x_{n-1}y_{n-1}| < m \end{cases}$

また、便宜上 $g(0,0)=\lambda$ と定義する。(※乗算とまぎらわしいため","を用いてある。)

n-th production $w_n=u_nx_nv_n \Rightarrow u_nx_ny_nv_n=w_{n+1}$, $\langle x_n, y_n \rangle \in P$ に N_p^* の要素 $f_D(n)=g_D(n, |u_nx_n|)$ を対応させる(f_D を f と略記する)

[Proposition 4] f_D は導出ステップ $\{1,\ldots,r\}$ から N_p^* の中への 1:1 対応である。

一般に f_D は順序を保存するとはいえない。即ち $f_D(1), f_D(2), \ldots, f_D(r)$ は N_p^* の $<$ 順序の通りに並ぶとはかぎらない。

(定義) $f_D(i) < f_D(j)$ ($i<j$) のとき導出 D は left to right であるという。

[Proposition 5] $w \in L(G)$ に対し w を導く任意の導出 D に対し同じ w を導く left to right の導出 D' あり。

謝辞: 東工大の木村泉助教授, 小林孝次郎助教授, 高橋正子氏には種々有益な助言をいただいたことを感謝致します。特に高橋正子氏からは §1 の系1「右延長文法による正規集合の特性化」が Büchi の結果の一部に含まれること等の御指摘

を得たことを付記します。

参考文献

Salomaa, A., Formal Languages, Academic Press(1974)

Büchi, J. R., Regular canonical systems, Archiv für Mathematishe Logik und Grundlagenforschung, 6(1964)91-111.

Arikawa, S., On the languages defined by sentential forms of context-free grammars, Res. Rept. 17, Res. Inst. Fund. Inform. Sci., Kyushu Univ. (1970), 1-12.

" " " , Closure and non-closure properties of quasi context-sensitive languages, Ibid. 37 (1973) 1-25.