数理解析研究所講究録
第 214 巻 1974 年 78-91

長波長の浅水波

東大 宇宙研　神部 勉

§1. はじめに

Shallow water における long wave の研究は Russell (1845)[1] に溯るといわれる。彼は1834年に，運河で舟が馬に引かれて動くとき生ずる波を観察し，その波が一定の速度で形を変えないで伝わっていくことを発見し，更に，その伝播速度を馬に乗って測定した。この波は single elevation からなり，前後に如何なる波もないことを報告し，Solitary Progressive Wave of Translation と名づけている。またこれに関連した室内実験も行なっている。ところが，Airy (1845) は単なる微小振巾展開では，permanent wave の解がないことを示した（§3参照）。Boussinesq (1872)[2] は，nonlinearity を多少考慮して，現在 Boussineq 方程式と呼ばれている方程式を提出し，その定常解として，solitary wave が存在することを示した。Korteweg と de Vries (1895)[3] はよく知られた K-dV 方程式を導

いて，周期的解として cnoidal wave（彼等自身で名づけた）があることを示し，それに含まれる parameter の両端の極限に solitary wave と Stokes wave があることを示した。

これらの理論的発展において重要なのは，長波長の浅水波においては，長さを特徴づける parameters として，波長 λ，波の振巾 a，水路の深さ h の 3 つがあって，それらの大小関係をはっきりさせる必要があるということである。以下では，それらの比として，

$$\varepsilon = \frac{a}{h} \quad , \qquad \delta = \frac{h}{\lambda}$$

を定義し，ε と δ は十分に小さいと仮定する。

Ursell (1953)[4] は $U_r = \varepsilon/\delta^2 = \lambda^2 a/h^3$ なる無次元量を導入し，次のように結論している：(1) $U_r \gg 1$ のとき，波は必ず非定常な変形を受ける，(2) $U_r = O(1)$ のとき，定常波（solitary wave，cnoidal wave）が存在する，(3) $U_r \ll 1$ および $a/\lambda \ll 1$ のとき，線型波が可能。

§ 2. Formulation

x 方向（水平軸）に進む平面波を仮定し，水面の変形を $\zeta(x, t)$ と表わす。波長の長い極限での波の速さを c（$=\sqrt{gh}$）として，次のような無次元化を行う：

$$x = x_*/h, \quad y = y_*/h, \quad \eta = \eta_*/h$$
$$t = c t_*/\lambda, \quad \Phi = \Phi_*/\lambda c,$$

ここで，* のついた変数が次元量である。

波に付随する流れを縮まない・渦なし（非粘性）の流れと仮定すると，速度ポテンシャルはLaplaceの方程式を満す：

$$\delta^2 \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad . \qquad (A)$$

境界条件は

$$y = -1 \text{ (底)で} \qquad \Phi_y(x, -1, t) = 0, \qquad (B\text{-}1)$$
$$y = \eta \text{ (表面)で} \qquad \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \frac{1}{\delta^2}\Phi_y^2) + \eta = 0, \qquad (B\text{-}2)$$
$$y = \eta \qquad \text{で} \qquad \Phi_y = \delta^2(\eta_t + \Phi_x \eta_x) . \qquad (B\text{-}3)$$

§3. Near field

Φ と η を次のように展開する：

$$\Phi = \varepsilon(\Phi_0 + \delta^2 \Phi_1 + \delta^4 \Phi_2 + \cdots\cdots) \qquad (1)$$
$$\eta = \varepsilon(\eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \cdots\cdots) \qquad (2)$$

(1)を (A) および (B−1) に代入すると，δ^2展開の各項より

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0 &= \phi_0(x, t), \\ \Phi_1 &= \phi_1(x, t) - \frac{1}{2}(y+1)^2 \phi_{0xx}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\Phi_2 = \phi_2(x,t) - \frac{1}{2}(y+1)^2\phi_{1xx} + \frac{1}{24}(y+1)^4\phi_{0xxxx},$$
$$\vdots$$

を得る。ここで ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, $\cdots$ は，x と t のある関数で，(B−2)，(B−3) および初期条件あるいは $x \to \pm\infty$ での境界条件等から決められるべきものである。

(2) と (3) を (B−2)，(B−3) に代入し，

$$\delta^2 = K^2 \varepsilon \quad (K^2 = 1/U_r)$$

とおき，ε のべキの各項を左右両辺で等しくおいて，更に，η_0, η_1, $\cdots$ を消去した形にすると

$$\phi_{0tt} - \phi_{0xx} = 0 \tag{4.1}$$
$$\phi_{1tt} - \phi_{1xx} = \frac{1}{3}\phi_{0xxxx} - \frac{1}{K^2}\left(2\phi_{0x}\phi_{0xt} + \phi_{0t}\phi_{0xx}\right) \tag{4.2}$$
$$\vdots$$

を得る。ただし，$\eta_0 = -\phi_{0t}$，$\eta_1 = -K^2\phi_{1t} + \frac{1}{2}K^2\phi_{0xxt} - \frac{1}{2}\phi_{0x}^2$ と表わされる。従って，F_1，F_2 を任意関数として

$$\left.\begin{aligned} \phi_0 &= F_1(X_-) + F_2(X_+), \\ X_\pm &= x \pm t \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

となる。もし $F_2 = 0$ とすると，

$$\phi_1 = -\frac{1}{4}X_+\left(\frac{1}{3}F_1'''(X_-) + \frac{3}{2K^2}F_1'^2(X_-)\right) + f_1(X_-) + f_2(X_+), \tag{6}$$

f_1，f_2 は任意関数である。ϕ_1 は X_+ に比例する secular term をもち，展開が *uniformly valid* でないことを示している。

このため，ϕ_0で表わされる線型波が，tと共にあるいはxの大きいところで（X_+が大きくなるため），変形をうけることを示している。

§4. Far field

Nonlinearityによるこの集積効果をとり入れるために，J. D. Cole[5]に従って，far field variablesを次ように定義する：

$$
\left.\begin{aligned}
X_{\pm} &= x \pm t\,, \\
\xi &= \varepsilon\,(x + \varepsilon\,\tau_1(x) + \cdots\cdots),
\end{aligned}\right\} \tag{7}
$$

$\tau_1(x)$は現在unknownで，Φがsecular termを持たないようにするための，PLK的項である。またfar fieldのポテンシャルと波形を

$$
\Phi = \varepsilon\,(\Psi_0 + \varepsilon\,\Phi_1 + \cdots\cdots), \tag{8}
$$

$$
\eta = \varepsilon\,(\zeta_0 + \varepsilon\,\zeta_1 + \cdots\cdots) \tag{9}
$$

と展開すると，(3)式を得たのと同様に，(A)と(B-1)より

$$
\left.\begin{aligned}
\Phi_0 &= \psi_0(X,\xi), \\
\Phi_1 &= \psi_1(X,\xi) - \tfrac{1}{2}(y+1)^2\psi_{0XX}, \\
\Phi_2 &= \psi_2(X,\xi) - \tfrac{1}{2}(y+1)^2\Big(\psi_{1XX} + \tfrac{2}{K^2}\psi_{0X\xi}\Big) + \tfrac{1}{24}(y+1)^4\psi_{0XXXX}, \\
\Phi_3 &= \psi_3(X,\xi) - \tfrac{1}{2}(y+1)^2\Big(\psi_{2XX} + \tfrac{2}{K^2}\psi_{1X\xi} + \tfrac{1}{K^4}\psi_{0\xi\xi}\Big) \\
&\quad + \tfrac{1}{24}(y+1)^4\Big(\partial_X^4\psi_1 + \tfrac{4}{K^2}\partial_\xi\partial_X^3\psi_0\Big) - \tfrac{1}{6!}\partial_X^6\psi_0, \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}\right\} \tag{10}
$$

を得る。　ここで X は X_+ または X_- のいずれかである。なお以下に使われる複号は $X_\pm$ と同順と考え，$X_\pm$ 両方の fields を対象とする。　前と同様に (9) (10) を (B-2) (B-3) に代入し，ε の各べキの係数を両辺で等しくおき，ζ_0, ζ_1 を消去すると，

$$\psi_{0\xi} \mp \frac{3}{4}\psi_{0X}^2 + \frac{K^2}{6}\psi_{0XXX} = 0 \quad (\text{KdV方程式}), \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{1\xi} \mp \frac{3}{2}\psi_{0X}\psi_{1X} + \frac{K^2}{6}\psi_{1XXX} = G(\psi_0) \\ &G(\psi_0) = \pm\frac{37}{10}\psi_{0X}\psi_{0\xi} - \frac{21}{40}\psi_{0X}^3 \pm \frac{101}{120}K^2\psi_{0XX}^2 - \frac{11}{30}K^2\psi_{0\xi XX} - 2\tau_1'\psi_{0\xi} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

を得る。　このとき $\zeta_0 = \mp\psi_{0X}$，$\zeta_1 = \mp K^2\psi_{1X} \pm \frac{1}{2}K^2\psi_{0XXX} - \frac{1}{2}\psi_{0X}^2$ によって波形が与えられる。　(11) の解としては，よく知られているように，solitary wave がある：

$$\left.\begin{aligned} &\psi_0 = S(\theta) \equiv \frac{A}{\alpha}\tanh\alpha\theta, \\ &\theta_\pm = X_\pm - \frac{A}{2}\xi. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

また (12) において，ψ_1 が non-secular である条件として

$$\tau_1' = \gamma \ (\text{const})$$

を得る。　このとき

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1 = C\,S'(\theta) + a_1 S(\theta) + a_2 S''(\theta) \\ &\xi = \varepsilon(x + \varepsilon\gamma x) = \varepsilon(1+\varepsilon\gamma)x \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

S' は (12) の右辺を省略した斉次方程式の解である。　また

$a_1 = 31A/30K^2$,　$a_2 = 209/720$　である。

§5．2つの solitary waves の衝突による phase shift

2つの solitary waves が正面衝突し，再び離れていくときの phase shift を求めるために，領域を2つに分ける。両者が十分に離れていて，2つの独立な solitary waves として解が表わせるような領域を far field とし，両者が重なって interact している領域を near field とする。両者がある intermediate region で，解析的に match されるためには，phase shift が導入されなければならないことを，この節で示そう。別の言い方すると，$t \to -\infty$ のとき，2つの独立な solitary waves があって，互いに接近する向きにあるとし；$t \approx 0$ のとき（near field），衝突したとすると；$t \to +\infty$ のとき，phase がずれた2つの独立な solitary waves となる。

$t \to -\infty$ にくらべて

[5－1]　Far field における2つの solitary waves

$t \to -\infty$ のとき：$X_- = x - t = O(1)$ である左の far field に

$$\left.\begin{aligned} \psi_0^{(-)} &= S_-(\theta_-) = \frac{A_-}{\alpha_-}\tanh \alpha_- \theta_- \\ \psi_1^{(-)} &= a_1^{(-)} S_-(\theta_-) + a_2^{(-)} S_-''(\theta_-) + C_- S_-'(\theta_-) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

なる solitary wave があり，また同時に，右の far field

$X_+ = x + t = O(1)$ に

$$\left.\begin{aligned} \psi_0^{(+)} &= S_+(\theta_+) = -\frac{A_+}{\alpha_+}\tanh\alpha_+\theta_+ \\ \psi_1^{(+)} &= a_1^{(+)}S_+(\theta_+) + a_2^{(+)}S_+''(\theta_+) + C_+S_+'(\theta_+) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

なる solitary waveがあったとする。 ここで $\theta_\pm = X_\pm - \frac{A_\pm}{2}\xi$ である。 このとき $O(\varepsilon^2)$ までの far field の速度ポテンシャルは (10), (8) を使って表わされる。

[5-2] Near field における waves

(4.1)式の一般解は

$$\phi_0 = F_-(X_-) + F_+(X_+) \qquad (17-1)$$

と書ける。 このとき (4.2) の解は次のように表わされる:

$$\left.\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{11}^{(s)} + \phi_{12}^{(s)} + \phi_1^{(m)} + \phi_1^{(+)} + \phi_1^{(-)}, \\ &\phi_1^{(\pm)} = \phi_1^{(\pm)}(X_\pm) \quad : \text{任意関数} \\ &\left.\begin{aligned} \phi_{11}^{(s)} &= X_+ G_-(X_-), \\ \phi_{12}^{(s)} &= X_- G_+(X_+), \end{aligned}\right\} \text{self interaction} \\ &\phi_1^{(m)} = \frac{1}{4K^2}\left(F_-(X_-)F_+'(X_+) - F_-'(X_-)F_+(X_+)\right), \\ &\qquad\qquad \text{mutual interaction} \\ &G_\pm = -\frac{1}{12}F_\pm''' \pm \frac{3}{8K^2}F_\pm'^2. \end{aligned}\right\} (17\text{-}2)$$

(1)式と(3)式より, 速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \Phi_N &= \varepsilon\phi_0 + K^2\varepsilon^2\left(\phi_1 - \tfrac{1}{2}(y+1)^2\phi_{0xx}\right) + O(\varepsilon^3) \\ &= \varepsilon\phi_0 + K^2\varepsilon^2\left(\phi_1^{(m)} + \phi_1^{(+)} + \phi_1^{(-)} - \tfrac{1}{2}(y+1)^2\phi_{0xx}\right) \\ &\qquad + K^2\varepsilon^2\left(X_+G_- + X_-G_+\right) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \qquad (18)$$

で与えられる。

[5-3] Matching

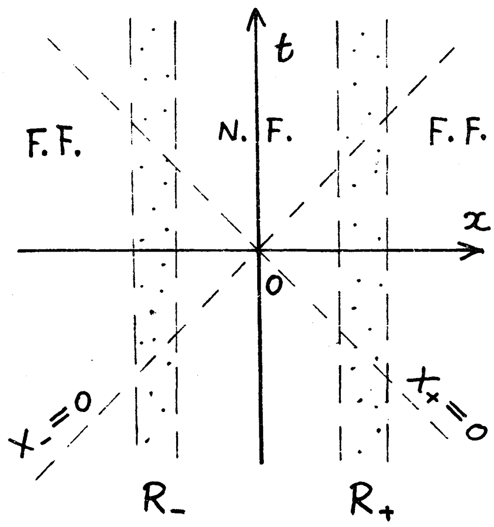

図 1

Far Field と Near Field における上記の解は，以下で定義する Intermediate Regions ($R_\pm$) で match させることができる（図1）。

$t<0$ のとき，左側の Intermediate Region (R_-) を次ように定義する（Cole[5]）：

$$\left.\begin{array}{l} X_-, \\ z = p(\varepsilon)\, x \ (<0) \end{array}\right\} \quad \text{fixed}, \qquad \varepsilon \to 0$$

ただし，p は $\varepsilon \ll p(\varepsilon) \ll 1$ であるような，ε のある intermediate function。R_- においては

$$|x| = |z|/p(\varepsilon) \to \infty, \qquad (x<0),$$

$$X_+ = x + t \to -\infty, \qquad (t = O(x)),$$

$$\xi = \varepsilon(1+\gamma)x = (1+\gamma)\frac{\varepsilon}{p(\varepsilon)} z \to 0, \quad \left(\frac{\varepsilon}{p} \to 0\right).$$

$$(t = -X_- + x = O(1) + (-\infty))$$

右側の Intermediate Region (R_+) も同様に定義される：

$$\left.\begin{array}{l} X_+, \\ z = p(\varepsilon)\, x \ (>0) \end{array}\right\} \quad \text{fixed}, \qquad \varepsilon \to 0.$$

従って，R_+ においては

$$x = z/p(\varepsilon) \to +\infty,$$

$$X_- = x - t \quad \to +\infty,$$

$$\xi = \varepsilon(1+\gamma)x \to 0 \ .$$

(18) 式で与えられる Near Field potential Φ_N の $R_\pm$ での極限形を求めるに際して，次のことを注意する：

$$\varepsilon X_\pm = \varepsilon(x \pm t) \to 0 \ .$$

従って，$R_\pm$ では (18) の右辺第3項は消えて，そこでの Φ を $\hat{\Phi}_N$ で表わすと

$$\hat{\Phi}_N = \varepsilon\left(\phi_0 + K^2\varepsilon\phi_1^{(m)}\right) + K^2\varepsilon^2\left(\phi_1^{(+)} + \phi_1^{(-)} - \frac{1}{2}(y+1)^2\phi_{0xx}\right). \quad (19)$$

ところが (17-1) (17-2) より

$$\phi_0 + K^2\varepsilon\phi_1^{(m)} = F_-(X_-) + F_+(X_+) + K^2\varepsilon\frac{1}{4K^2}\Big(F_-(X_-)F_+'(X_+) - F_-'(X_-)F_+(X_+)\Big)$$

と表わされるが，R_- では $X_+ = -\infty$ であるから

$$\left\{\phi_0 + K^2\varepsilon\phi_1^{(m)}\right\}[R_-] = F_-(X_-) + F_+(-\infty) + \frac{1}{4}\varepsilon\Big(F_+'(-\infty)F_-(X_-) - F_+(-\infty)F_-'(X_-)\Big)$$

$$= F_-\left(X_- - \frac{1}{4}F_+(-\infty)\varepsilon\right) + F_+(-\infty) + \frac{1}{4}\varepsilon F_+'(-\infty)F_-(X_-) + O(\varepsilon^2) \quad (20)$$

同様に，R_+ では $X_- = +\infty$ であるから

$$\left\{\phi_0 + K^2\varepsilon\phi_1^{(m)}\right\}[R_+] = F_+\left(X_+ + \frac{1}{4}F_-(+\infty)\varepsilon\right) + F_-(+\infty) - \frac{\varepsilon}{4}F_-'(+\infty)F_+(X_+) + O(\varepsilon^2) \quad (21)$$

と書けて，mutual interaction の効果が $O(\varepsilon)$ の phase shift にくり込めることがわかる。(20)(21)の3番目の項は消えることが後でわかる。

次に Far Field potential については，~~(15)と(8)より~~ R_- において $\xi=0$ であるから，(15)と(8)より

$$\hat{\Phi}_F(R_-)= \varepsilon S_-(X_-)+\varepsilon^2\{a_T S_-(X_-)+a_2 S_-''(X_-)+C_- S_-'(X_-)-\tfrac{1}{2}(y+1)^2 S_-''(X_-)\}+O(\varepsilon^3)$$

$$= \varepsilon S_-(X_-+\varepsilon C_-)+\varepsilon^2\{a_1 S_- + a_2 S_-'' - \tfrac{1}{2}(y+1)^2 S_-''\}+O(\varepsilon^3) \qquad (22)$$

を得る。同様に R_+ では

$$\hat{\Phi}_F(R_+)= \varepsilon S_+(X_+ +\varepsilon C_+)+\varepsilon^2\{a_1 S_+ + a_2 S_+'' - \tfrac{1}{2}(y+1)^2 S_+''\}+O(\varepsilon^3) \qquad (23)$$

となる。Matching principle は，R_- で，(20)と(19)より得られる $\hat{\Phi}_N$ が(22)と一致すること，また R_+ で(21)と(19)より得られる $\hat{\Phi}_N$ が(23)と一致することを要請する。このとき，次の結果が得られる：

$$\left.\begin{aligned}
&F_-(X)=S_-(X),\\
&F_+(X)=S_+(X),\\
&C_\pm=\pm\frac{1}{4}F_\mp(\pm\infty)=\pm\frac{1}{4}\frac{A_\mp}{\alpha_\mp},\\
&\phi_1^{(-)}=a_1^{(-)}S_- + a_2^{(-)}S_-'',\\
&\phi_1^{(+)}=a_1^{(+)}S_+ + a_2^{(+)}S_+''.
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

これが $t<0$ における $R\pm$ での matching の結果である。$t \simeq 0$ で2つの waves は interact し，その後再び，左右に別れて出て行く。 $t>0$ でもやはり，$R\pm$ で両 fields の解を match させることができて，その結果は (22)(23) の中の C_+, C_- を次の C_+', C_-' でおき換えればよいということである：

$$C_+' = -\frac{A_-}{4\alpha_-} ,$$

$$C_-' = \frac{A_+}{4\alpha_+} .$$

従って $O(\varepsilon^2)$ までみると，S_- については，$t<0$ で $(\theta_- + C_-\varepsilon)$ の phase を持っていた波が，$t>0$ で phase が $(\theta_1 + C_-'\varepsilon) = (\theta_1 + C_1\varepsilon + (C_1' - C_1)\varepsilon)$ と表わされることになり，phase shift は

$$\varepsilon(C_-' - C_-) = \varepsilon \frac{A_+}{2\alpha_+}$$

となる。 同様に S_+ の波については phase shift は

$$\varepsilon(C_+' - C_+) = -\varepsilon \frac{A_-}{2\alpha_-}$$

と与えられる。 phase shift は $O(\varepsilon)$ で，互いに相手の波の振巾と波長に依存している。 これは Oikawa & Yajima[6] の結果と consistent である（§4 B）.

§6. 深さおよび幅が変化する channel における Far Field

深さがゆっくりと変化する channel のばあいは，Kakutani[7] と Johnson[8] によって Far Field equation が得られている。

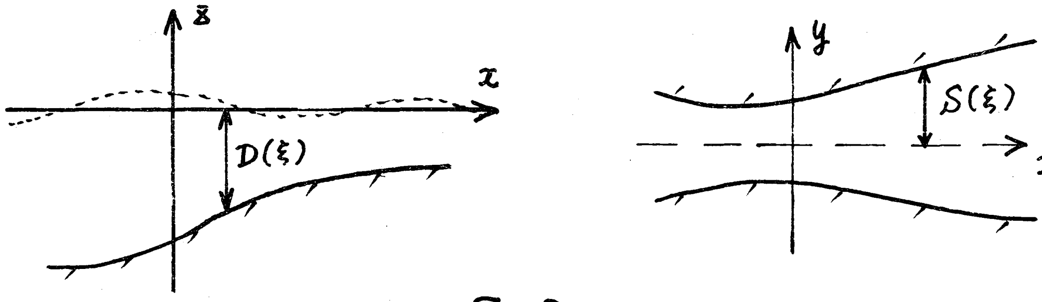

図 2

深さと共に水平方向の幅が変化する channel についても，簡単な Far Field equation が得られる。結果のみを記すと，図2のように channel の深さが $D(\xi)$，幅が対称的に $S(\xi)$ で変化するとき $(\xi=\varepsilon x)$，次の方程式が得られる：

$$\left.\begin{aligned} & u_\xi + \frac{3}{2} S^{-\frac{1}{2}} D^{-\frac{7}{4}} u u_X + \frac{1}{6} D^{\frac{1}{2}} u_{XXX} = 0 \\ \text{ただし}\quad & u = S^{1/2} D^{1/4} \psi_{0X} \\ & X = \int^x \{D(\varepsilon x)\}^{-1/2} dx - t, \quad \xi = \varepsilon x. \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}1)$$

また

$$\tau = \frac{1}{6} \int^\xi D^{1/2}(\xi)\, d\xi$$

$$v = 9u$$

なる変換をおこなうと (6-1) は

$$v_\tau + S^{-1/2} D^{-9/4} v v_X + v_{XXX} = 0$$

となる。 ψ_0 は速度ポテンシャルを ε 展開したときの 1st term である。

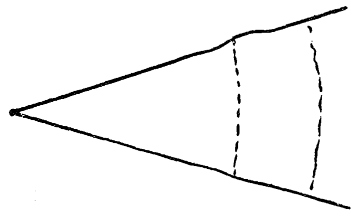

図 3

特に図3のような深さ一定の放射状の channel に対しては，(6-1) で $D=\text{const}$, $S=\xi$ とおいて適当な変換をすれば得られるように

$$v_\xi + \frac{3}{2}\xi^{-\frac{1}{2}} v v_X + \frac{1}{6} v_{XXX} = 0,$$

$$X = x - t,$$
$$\xi = \varepsilon x,$$
$$v = \xi^{1/2}\psi_0 .$$

参考文献

1) Russell, J. S. 'Report on Waves', 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1845, p. 311.

2) Boussinesq, J. J. Math. pures appl. 2 (1872). 55.

3) Korteweg, D. J. & de Vries, G. Phil. Mag. 39 (1895) 433.

4) Ursell, F. Proc. Camb. Phil. Soc. 49 (1953) 685.

5) Cole, J. D. 'Perturbation Methods in Applied Mathematics' Blaisdell Publishing Company, 1968.

6) Oikawa, M. & Yajima, N. J. Phys. Soc. Japan 34 (1973) 1093.

7) Kakutani, T. J. Phys. Soc. Japan 30 (1970) 272.

8) Johnson, R. S. J. Fluid Mech. 54 (1972) 81.