数理解析研究所講究録
第 216 巻 1974 年 99-109

Lipeomorphisms close to an Anosov Diffeomorphism

名大 理　高木 健太郎

§0 Introduction

以下Mを compact connected boundaryless C^∞-manifold of dimension n with a Riemannian metric $\|\cdot\|$ とする。$\|\cdot\|$ より自然に induce されるM上の distance function を d で表わす。MからMへの continuous map の全体を $C^0(M)$ で表わし, homeomorphism の全体を $H(M)$ で表わす。$C^0(M)$ 上には d より自然に induce される distance function d_0 がある.

; $d_0(f,g) = \sup_{x \in M} d(f(x), g(x)) \qquad {}^\forall f, g \in C^0(M)$

MからMへの lipschitz map の全体を $L(M)$ で表わし, lipeomorphism の全体を $HL(M)$ で表わす。; $HL(M) = \{f \in H(M) \mid f, f^{-1} \in L(M)\}$

勿論, $HL(M) \subset L(M) \subset C^0(M)$ である。$HL(M)$ の各元 f, g に対して, $d_0(f,g)$ が十分小さければ, lipschitz の意味での近さを計る量 $d_L(f,g)$ が自然に定義される。(§1)

MからM上への C^1-diffeomorphism の全体を $\mathrm{Diff}^1(M)$ で表わす。$\mathrm{Diff}^1(M)$ の各元 f, g に対しても, $d_0(f,g)$ が十分小さければ, C^1 の

意味での近さを計る量 $d_1(f,g)$ が自然に定義される。平均値の定理によって, $\mathrm{Diff}^1(M) \subset HL(M)$ であるが, d_L を $\mathrm{Diff}^1(M)$ に制限したものが d_1 であるとみてよい。(See §1 and [4])

$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ が Anosov diffeomorphism であるとは, 次の条件をみたすことである。

; $\exists E^s = \bigcup_{x\in M} E^s_x$, $\exists E^u = \bigcup_{x \in M} E^u_x$: continuous subbundles of TM

$\exists C \geq 1$, $\exists \lambda : 0 < \lambda < 1$: constants

such that

(i) $TM = E^s \oplus E^u$ (Whitney sum)

(ii) $df(E^\sigma) = E^\sigma$ $\sigma = s, u$. 但し, df は f の differential を表わす。

(iii) $\| df^n(v) \| \leqq C \cdot \lambda^n \|v\|$ $\forall v \in E^s$ $\forall n \geq 0$

$\| df^{-n}(w) \| \leqq C \cdot \lambda^n \|w\|$ $\forall w \in E^u$ $\forall n \geq 0$

Anosov diffeomorphism の stability に関して次の定理がある。

Theorem (Anosov) ([1])

$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ を Anosov diffeomorphism とする。 このとき,

$\exists \varepsilon_0 > 0$ $\exists \delta_0 > 0$

such that

$\exists! \varphi : \{ g \in \mathrm{Diff}^1(M) \mid d_1(g,f) < \delta_0 \} \longrightarrow \{ u \in C^0(M) \mid d_0(u, 1_M) < \varepsilon_0 \}$

with the property that $g \circ \varphi(g) = \varphi(g) \circ f$ for $\forall g \in \mathrm{Diff}^1(M)$ with $d_1(g,f) < \delta_0$.

更にこのとき，各 $g \in \mathrm{Diff}^1(M)$ with $d_1(g, f) < \delta_0$ に対して，$\varphi(g)$ は homeomorphism であり，$d_0(\varphi(g), 1_M) \longrightarrow 0$ as $d_1(g, f) \to 0$ でもある。

Theorem (P. Walters) ([7])

$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ を Anosov diffeomorphism とする。　　このとき，

$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \exists \delta_0 > 0$

such that

$$\exists 1\, \varphi : \{g \in H(M) \mid d_0(g, f) < \delta_0\} \longrightarrow \{u \in C^0(M) \mid d_0(u, 1_M) < \varepsilon_0\}$$

with the property that $f \circ \varphi(g) = \varphi(g) \circ g$ for $\forall g \in H(M)$ with $d_0(g, f) < \delta_0$

更にこのとき，各 $g \in H(M)$ with $d_0(g, f) < \delta_0$ に対して $\varphi(g)$ は onto であり，$d_0(\varphi(g), 1_M) \longrightarrow 0$ as $d_0(g, f) \longrightarrow 0$ でもある。

Remark.

P. Walters の定理で，$\varphi(g)$ は一般には injective ではない．

ここでは次の定理を証明する．

Theorem ([6])

$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ を Anosov diffeomorphism とする．　　このとき，

$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \exists \delta_0 > 0$

such that

$$\exists 1\, \varphi : \{g \in HL(M) \mid d_\ell(g, f) < \delta_0\} \longrightarrow \{u \in C^0(M) \mid d_0(u, 1_M) < \varepsilon_0\}$$

with the property that $g \circ \varphi(g) = \varphi(g) \circ f$ for $\forall g \in HL(M)$ with $d_\ell(g, f) < \delta_0$

更にこのとき，各 $g \in HL(M)$ with $d_\ell(g, f) < \delta_0$ に対して，$\varphi(g)$ は homeomorphism であり，$d_0(\varphi(g), 1_M) \to 0$ as $d_\ell(g, f) \to 0$ でもある。

証明は，J. Moser [4] の idea に依りながら，Anosov diffeomorphism が expansive であることに注意して進めていく。([6])

$\{(U_\alpha, \alpha)\}_\alpha$ を有限個の charts よりなる M の1つの atlas とする。但し各 local diffeomorphism α は U_α の closure $\overline{U_\alpha}$ を含む，M のある open subset 上で define されているとする。

; $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$: a finite open covering of M.

$\mathcal{D}(\alpha) \supset \overline{U_\alpha}$, $\alpha : \mathcal{D}(\alpha) \to \mathbb{R}^n$ into C^∞ diffeomorphism.

$\mathbb{R}^n$ の standard norm を $|\cdot|$ で表わす。

§1. Lipschitz maps on M.

正数 λ_1 を次の条件をみたすように十分小さくとる。

; 各 $f \in C^0(M)$ with $d_0(f, 1_M) < \lambda_1$ に対して，

$$f(\overline{U_\alpha}) \subset \mathcal{D}(\alpha) \quad {}^\forall\alpha$$

任意に $f \in C^0(M)$ with $d_0(f, 1_M) < \lambda_1$ をとる。このとき，$f \in L(M)$ となるためには，各 α に対して $\alpha \circ f \circ \alpha^{-1} : \alpha(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が lipschitz map であること，即ち $\alpha \circ f \circ \alpha^{-1} : \alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}^n$ の lipschitz constant を，記号 $L(\alpha \circ f \circ \alpha^{-1}$ on $\alpha(U_\alpha))$ (または単に $L(\alpha \circ f \circ \alpha^{-1})$) で表わすとき，$L(\alpha \circ f \circ \alpha^{-1}$ on $\alpha(U_\alpha)) < +\infty$ であることが必要かつ十分である。

各 $f \in L(M)$ with $d_0(f, 1_M) < \lambda_1$ に対して，$d_L(f, 1_M)$ を，

$$d_L(f, 1_M) = d_0(f, 1_M) + \sup_\alpha L(\alpha \circ f \circ \alpha^{-1} - 1 \text{ on } \alpha(U_\alpha))$$

によって定める。また各 $g, f \in HL(M)$ with $d_0(g, f) = d_0(g\circ f^{-1}, 1_M) < \lambda_1$ に対して、$d_L(g, f) = d_L(g\circ f^{-1}, 1_M)$ と定める。

Proposition.

$f \in L(M)$ を $d_0(f, 1_M) < \lambda_1$ として任意にとる。このとき、もし、$d_L(f, 1_M)$ が十分小であるならば、f は M の lipeomorphism である。; $f \in HL(M)$

§2. Lipschitz vector fields on M.

$\mathfrak{X}^0(M)$ を M 上の continuous vector field の全体とする。$\mathfrak{X}^0(M)$ の中には、complete norm $\|\cdot\|$ が、M上の与えられている Riemannian metric $\|\cdot\|$ より自然に induce される。

; $\|v\| = \sup_{x\in M} \|v_x\|$ $\quad \forall v = (v_x)_{x\in M} \in \mathfrak{X}^0(M)$

各 chart (U_α, α) に対して、$U'_\alpha = \alpha(U_\alpha)$ とおき、$T\alpha : TM|U_\alpha \longrightarrow U'_\alpha \times \mathbb{R}^n$ を α より自然に induce された isomorphism とする。$T\alpha : TM|U_\alpha \longrightarrow U'_\alpha \times \mathbb{R}^n$ と projection $U'_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ との composition を $D\alpha$ で表わす。

$$\begin{tikzcd} TM|U_\alpha \arrow[r, "T\alpha"] \arrow[dr, "D\alpha"'] & U'_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\text{projection}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

また各 $v \in \mathfrak{X}^0(M)$ に対して、$v_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $v_\alpha = D\alpha \circ v|U_\alpha$ によって定める。

map $|\cdot| : \mathfrak{X}^0(M) \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}$ を、

$$|v| = \sup_\alpha \Big(\sup_{x \in U_\alpha} |v_\alpha(x)| \Big) \qquad \forall v \in \mathfrak{X}^0(M)$$

によって定める。$|\cdot|$ は $\mathfrak{X}^0(M)$ の中の complete norm であり，$\|\cdot\|$ とは equivalent である。

Definition.

$\forall v \in \mathfrak{X}^0(M)$ をとる。このとき，v が M 上の lipschitz vector field であるとは，各 α に対して $v_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が lipschitz である，即ち $L(v_\alpha \circ \alpha^{-1} \text{ on } U'_\alpha) < +\infty$ であることを言うものと定める。

M 上の lipschitz vector field の全体を $\mathfrak{X}_\ell(M)$ で表わす。map $|\cdot|_\ell : \mathfrak{X}_\ell(M) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ を，

$$|v|_\ell = |v| + \sup_\alpha L(v_\alpha \circ \alpha^{-1}) \qquad \forall v \in \mathfrak{X}_\ell(M)$$

によって定める。$(\mathfrak{X}_\ell(M), |\cdot|_\ell)$ は 1つの Banach space である。

$\exp = (\exp_x)_{x\in M} : TM \longrightarrow M$ を，M 上の与えられている Riemannian metric $\|\cdot\|$ より induce された exponential map とする。

一般に normed space $(E, \|\cdot\|)$ に於いて，原点の回りの closed λ-ball を $(E, \|\cdot\|)_\lambda$ で，open λ-ball を $(E, \|\cdot\|)^\circ_\lambda$ で夫々表わすことにする。

M は compact であるから，正数 λ_2 が存在して，各 $x \in M$ に対して $\exp_x$ は $(T_xM, \|\cdot\|)^\circ_{\lambda_2}$ から，(M, d) に於ける x の回りの open λ_2-ball への onto diffeomorphism を与えるようにできる。更にこのとき，任意の $x \in M$ 及び $v_x \in T_xM$ with $\|v_x\| < \lambda_2$ に対して $\|v_x\| = d(x, \exp_x v_x)$ であるとしてよい。従って この λ_2 に対しては
$\exp : (\mathfrak{X}^0(M), \|\cdot\|)^\circ_{\lambda_2} \ni v \longrightarrow \exp v = \exp\circ v \in \{f \in C^0(M) \mid d_0(f, 1_M) < \lambda_2\}$ は

well-defined で bijective であり、更に、任意の $v\in(\mathfrak{X}^{0}(M),\|\cdot\|)^{\circ}_{\lambda_2}$ に対して、$d_0(\exp v, 1_M)=\|v\|$ となる。便宜上、$\lambda_2\leqq\lambda_1$ としておく。

$|\cdot|$ と $\|\cdot\|$ との equivalent 性により、正数 ε_1 が存在して、$(\mathfrak{X}^{0}(M), |\cdot|)^{\circ}_{\varepsilon_1}\subset(\mathfrak{X}^{0}(M),\|\cdot\|)^{\circ}_{\lambda_2}$ となる。

Proposition

正数 ε_2 ; $0<\varepsilon_2\leqq\varepsilon_1$ が存在して 次の条件をみたす。

; (i) 各 $v\in(\mathfrak{X}^{0}(M),|\cdot|)^{\circ}_{\varepsilon_2}$ に対して

$$\exp v\in L(M) \underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} v\in\mathfrak{X}_{\ell}(M)$$

(ii) 各 sequence $\{v^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathfrak{X}_{\ell}(M)\cap(\mathfrak{X}^{0}(M),|\cdot|)^{\circ}_{\varepsilon_2}$ に対して

$$d_\ell(\exp v^{(i)}, 1_M)\to 0 \text{ as } i\to\infty \underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} |v^{(i)}|_\ell\to 0 \text{ as } i\to\infty$$

§3. proof of the theorem.

Lemma 1

正数 δ_1, ε_3 ; $0<\varepsilon_3\leqq\varepsilon_1$, 関数 $L_1:(0,\delta_1)\times(0,\varepsilon_3)\longrightarrow R^{+}$ 及び continuous map $r:(\mathfrak{X}_{\ell}(M),|\cdot|_\ell)^{\circ}_{\delta_1}\times(\mathfrak{X}^{0}(M),|\cdot|)^{\circ}_{\varepsilon_3}\longrightarrow\mathfrak{X}^{0}(M)$ が存在して 次の条件をみたす。

; (i) 各 $w\in(\mathfrak{X}_{\ell}(M),|\cdot|_\ell)^{\circ}_{\delta_1}$ 及び $v\in(\mathfrak{X}^{0}(M),|\cdot|)^{\circ}_{\varepsilon_3}$ に対して

$$\exp w\circ\exp v=\exp(w+v+r(w,v)) \qquad r(w,0)=r(0,v)=0$$

(ii) $^\forall\delta$; $0<\delta<\delta_1$, $^\forall\varepsilon$; $0<\varepsilon<\varepsilon_3$, $^\forall w\in(\mathfrak{X}_{\ell}(M),|\cdot|_\ell)_\delta$ 及び $^\forall v, v'\in(\mathfrak{X}^{0}(M),|\cdot|)_\varepsilon$ に対して、

$$|r(w,v)-r(w,v')|\leqq L_1(\delta,\varepsilon)\cdot|v-v'|$$

(iii) $L_1(\delta, \varepsilon) \longrightarrow 0$ as $\delta, \varepsilon \longrightarrow 0$

以下 $f: M \longrightarrow M$ を1つの C^1-diffeomorphism としてとり，固定する。このfに対して $\mathcal{X}^0(M)$ の continuous linear automorphism f_* を

$$f_*(v) = df \circ v \circ f^{-1} \qquad {}^\forall v \in \mathcal{X}^0(M)$$

によって定める。

Lemma 2

正数 ε_4 ; $0 < \varepsilon_4 \leqq \varepsilon_1$，有界関数 $L_2 : (0, \varepsilon_4) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 及び continuous map $s : (\mathcal{X}^0(M), |\cdot|)^\circ_{\varepsilon_4} \longrightarrow \mathcal{X}^0(M)$ が存在して，次の条件をみたす。

; (i) 各 $v \in (\mathcal{X}^0(M), |\cdot|)^\circ_{\varepsilon_4}$ に対して

$$f \circ \exp v \circ f^{-1} = \exp(f_*(v) + s(v)) \quad , \quad s(0) = 0$$

(ii) 各 ε ; $0 < \varepsilon < \varepsilon_4$ 及び $v, v' \in (\mathcal{X}^0(M), |\cdot|)_\varepsilon$ に対して

$$|s(v) - s(v')| \leqq L_2(\varepsilon)\, |v - v'|$$

(iii) $L_2(\varepsilon) \longrightarrow 0$ as $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Lemma 3

fを Anosov diffeomorphism とする。然らば f は expansive である，即ち，正数 λ_0 が存在して，各 $x, y \in M$ with $x \neq y$ に対して常に

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} d(f^m(x), f^m(y)) > \lambda_0$$

proof of the theorem

${}^\forall g \in HL(M)$ 及び ${}^\forall u \in C^0(M)$ をとる。　　　このとき，

$$g \circ u = u \circ f \underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} (g \circ f^{-1}) \circ (f \circ u \circ f^{-1}) = u \quad \cdots\cdots ①$$

いま $d_e(g, f)$ 及び $d_0(u, 1_M)$ が 十分小さければ、§2 で述べたことより、$^{\exists 1} w \in \mathfrak{X}_e(M)$ with $|w|_e$ sufficiently small, $^{\exists 1} v \in \mathfrak{X}^0(M)$ with $|v|$ sufficiently small such that $g \circ f^{-1} = \exp w$, $u = \exp v$ となる。よって ① は 次の式と equivalent となる。

$$;\quad \exp w \circ f \circ \exp v \circ f^{-1} = \exp v \quad \cdots\cdots ②$$

Lemma 2 続いて Lemma 1 により、

$$\exp w \circ f \circ \exp v \circ f^{-1} = \exp w \circ \exp(f_*(v) + s(v))$$
$$= \exp(w + f_*(v) + s(v) + r(w, f_*(v) + s(v)))$$

よって ② は 次の式と equivalent である.

$$;\quad w + f_*(v) + s(v) + r(w, f_*(v) + s(v)) = v \quad \cdots\cdots ③$$

いま f は Anosov diffeomorphism であるから $1 - f_* : \mathfrak{X}^0(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^0(M)$ は continuous linear automorphism である。従って ③ は次の式と equivalent である。

$$;\quad v = (1 - f_*)^{-1}(w + s(v) + r(w, f_*(v) + s(v))) \quad ---- ④$$

以下 ④ を解くことを考える。

各 $w \in \mathfrak{X}_e(M)$ with $|w|_e$ sufficiently small 及び $v \in \mathfrak{X}^0(M)$ with $|v|$ sufficiently small に対して、$F(v) = f_*(v) + s(v)$, $G_w(v) = (1 - f_*)^{-1}(w + s(v) + r(w, f_*(v) + s(v)))$ と決ておく. Lemma 1 の (ii) と (iii) 及び Lemma 2 の (ii) と (iii) により 次の命題を得る。

$$;\quad {}^{\exists}\delta_2 ; 0 < \delta_2 \leqq \delta_1, \quad {}^{\exists}\varepsilon_5 ; 0 < \varepsilon_5 < \varepsilon_1$$

such that

(i) $\forall w \in (\mathfrak{X}_l(M), |\cdot|_l)^\circ_{\delta_2}$, $\forall v \in (\mathfrak{X}^\circ(M), |\cdot|)_{\varepsilon_5}$ に対して

$$|(1-f_*)^{-1}(\mathfrak{s}(v))| \leqq 1/3\,|v|$$

$$|(1-f_*)^{-1}(\Gamma(w, F(v)))| \leqq 1/3\,|v|$$

(ii) $\forall w \in (\mathfrak{X}_l(M), |\cdot|_l)^\circ_{\delta_2}$ $\forall v, v' \in (\mathfrak{X}^\circ(M), |\cdot|)_{\varepsilon_5}$ に対して

$$|G_w(v) - G_w(v')| \leqq 1/2\,|v-v'|$$

さて, $\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_5$ をとる. この ε に対して,

$\exists \delta : 0 < \delta \leqq \delta_2$ *such that* $|(1-f_*)^{-1}(w)| < 1/3\,\varepsilon$ for $\forall w \in (\mathfrak{X}_l(M), |\cdot|_l)^\circ_\delta$

であることはよい。いま $\forall w \in (\mathfrak{X}_l(M), |\cdot|_l)^\circ_\delta$ をとるとき, いま述べたことと, 上の (i), (ii) により, $G_w(\ ) : (\mathfrak{X}^\circ(M), |\cdot|)_\varepsilon \ni v \longrightarrow G_w(v) \in (\mathfrak{X}^\circ(M), |\cdot|)_\varepsilon$ は well-defined で, contraction constant $1/2$ の contraction になっている.(更に, 各 $v \in (\mathfrak{X}^\circ(M), |\cdot|)_\varepsilon$ に対して, $|G_w(v)| < \varepsilon$ でもある。) 従って contraction principle により

$\exists ! \, v \in (\mathfrak{X}^\circ(M), |\cdot|)^\circ_\varepsilon$ s.t. $G_w(v) = v$

i.e. $\exp w \circ f \circ \exp v \circ f^{-1} = \exp v$.

さて, $u = \exp v$ は 1_M と homotopic であるから onto である。よって次の命題を証明すれば, Theorem の証明は終わる。

: $\forall u : M \to M$ map を $d_0(u, 1_M) < \lambda_0/2$ にとり fix する.

いま, もし, $\exists g : M \to M$ bijective map such that $g \circ u = u \circ f$ であるならば, u は injective である。

∵)

$^{\forall}x, y \in M$ をとり, $u(x) = u(y)$ と仮定する. $x \neq y$ と仮定すれば Lemma 3 により, $^{\exists} m_0 \in \mathbb{Z}$ s.t. $d(f^{m_0}(x), f^{m_0}(y)) \geq \lambda_0$. 一方 $u \circ f^{m_0} = g^{m_0} \circ u$ であるから. $u \circ f^{m_0}(x) = g^{m_0}(u(x)) = g^{m_0}(u(y)) = u \circ f^{m_0}(y)$

$$\therefore \lambda_0 \leq d(f^{m_0}(x), f^{m_0}(y)) \leq d(f^{m_0}(x), u \circ f^{m_0}(x)) + d(u \circ f^{m_0}(y), f^{m_0}(y))$$
$$\leq d(u, 1_M) + d(u, 1_M) < \lambda_0$$

これは矛盾である。よって $x = y$ でなければならない. //

q.e.d.

References.

[1]. Anosov, Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds with Negative Curvature, Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics, (translated by the AMS) No. 90 (1967)

[2]. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York, 1960

[3] Hirsch and Pugh, Stable Manifolds and Hyperbolic Sets, Proc. of Symposia in Pure Math. (Global Analysis) XIV, AMS (1970) 133 ~ 163.

[4] Moser, On a Theorem of Anosov, J. of Differential Equations 5 (1969) 411 ~ 440.

[5]. Nitecki, Differentiable Dynamics, Cambridge the M.I.T. Press. 1971.

[6]. Takaki, Lipeomorphisms close to an Anosov Diffeomorphism, (to appear)

[7]. Walters, Anosov diffeomorphisms are topologically stable, Topology 9, 71 ~ 78 (1970)