数理解析研究所講究録
第218巻 1974年 1-15

淀み点の近くの流れの安定

航宇技研および日大理工　谷　一郎

鈍い物体の淀み点近くの流れに，速度変動の著しい範囲のあることが発見されたのは，Piercy と Richardson (1928, 1930) の実験によるものである．その中の一つの厚さ 18% の流線形柱の場合について見れば，一様な流れの方向の平均速度は，前縁の上流に前縁曲率半径 R の約 5 倍の距離から減少し始める．速度変動の振幅は，この距離でも，さらに上流に進んでも変わらないが，前縁から $2R$ の距離に近づくと 2 倍に増加し，$\frac{1}{2}R$ の距離に近づくと 4 倍を越える．淀み点の近くの流線は速度の増す側に対して凹になるので，この現象は回転円筒間の流れの Taylor 不安定と，同様の機構によるものではないかと考えられた．

併し問題はその後ほとんど忘却され，例えば Goldstein の Modern Developments in Fluid Dynamics (1938) などにも収録されていない．ようやく Görtler (1955) によつて再生され，平

面壁 $y=0$ に向かう二次元淀み流れ

$$u = axF'(\eta), \quad v = -\sqrt{\nu a}\,F(\eta) \tag{1}$$

の安定が検討された．直角座標 (x, y, z) を用い，u および v は x および y 方向の速度成分，ν は動粘性係数，a は時間の逆数の次元を持つ定数，$\eta=\sqrt{\frac{a}{\nu}}\,y$，$(\,'\,)$ は η に関する微分，F は $F'''+FF''-F'^2+1=0$ を満足するいわゆる Hiemenz 関数，$\eta=0$ で $F=F'=0$，$\eta\to\infty$ に対し $F'\to 1$ である．従つてこの流れは η の大きい値に対して，二次元の非粘性非回転運動 $u=ax$, $v=-ay$ に漸近する．Görtler は凹面に沿う境界層の場合と同様に，z 方向に周期的に変化する攪乱（回転方向が交互に変わる縦の渦の群）を考えて

$$\left.\begin{aligned} u &= ax\left\{F'(\eta)+\hat{u}(\eta)e^{\alpha t}\cos\kappa\zeta\right\}, \\ v &= -\sqrt{\nu a}\left\{F(\eta)+\hat{v}(\eta)e^{\alpha t}\cos\kappa\zeta\right\}, \\ w &= \kappa\sqrt{\nu a}\,\hat{w}(\eta)e^{\alpha t}\sin\kappa\zeta, \quad \zeta=\sqrt{\frac{a}{\nu}}\,z \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

とおき，Navier-Stokes の方程式に代入して，中立安定 $\alpha=0$ の場合の波数 $\sqrt{\frac{a}{\nu}}\kappa$ を境界値問題の固有値として定めることを試みた．この場合に，例えば x 方向の渦度成分は，$\omega_x = a\kappa(\hat{w}'-\hat{v})\sin\kappa\zeta$ となり，$a\kappa(\hat{w}'-\hat{v})=\omega(\eta)$ は微分方程式

$$\omega''+F\omega'+(F'-\kappa^2)\omega = 0 \tag{3}$$

を満足する．$\eta \geqq \eta_0$ では $F'=1$，$F=\eta-\beta$ $(\beta=0.64790)$ で近似されるので，ω の方程式は

$$\omega'' + (\eta - \beta)\omega' + (1 - \kappa^2)\omega = 0 \qquad (4)$$

となる．この方程式の解は超幾何関数で表わされ，$\eta \to \infty$ における性質が明らかである．同じようにして，$\hat{u}$, $\hat{v}$ および $\hat{w}$ についても解が求められる．Hämmerlin (1955) は $\eta \to \infty$ において解が有界になるように積分定数を定め，なお残る積分定数を適当に選ぶことによつて，壁面 $\eta = 0$ で境界条件を満たす $0 \leqq \eta \leqq \eta_0$ に対する解と，$\eta = \eta_0$ において接続することを考えた．そしてもし $0 < \kappa < 1$ ならば，このような接続が常に可能であることを示した．このことは，0 と 1 の間の κ がすべて固有値であることを意味している．これは数値積分によつても確かめられ，なおこの範囲外には固有値がなく，特に孤立固有値のないことが明らかにされた．

このような結果は，(i) 二次元淀み流れが z 方向に周期的な撹乱に対して不安定であること，(ii) その波数としては，0 から $\sqrt{\frac{a}{\nu}}$ までのすべてが可能であることを表わしている．(i) の関連で触れておきたいのは，Davey と Schofield (1967) が見いだしたように

$$\left.\begin{aligned} u &= ax f'(\eta), \quad w = az g'(\eta), \\ v &= -\sqrt{\nu a}\left\{ f(\eta) + g(\eta) \right\} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

が (1) と同様に Navier-Stokes の方程式を厳密に満たすことである．$\eta = 0$ で $f = f' = g = g' = 0$，$\eta \to \infty$ に対し $f' \to 1$,

$g' \to 0$ であって，外側の流れは（1）と同様に $u=ax$, $v=-ay$ になっている．つまり二次元淀み流れ（1）に対して，（5）で表わされるような有限の攪乱が存在し得ることになり，二次元淀み流れの三次元的な攪乱に対する不安定を示唆するように解釈される．(ii) の波数の任意性については，実験の結果（後述）は必ずしもそうではなくて，実験の条件によって定まる波数が存在することを示すように見える．

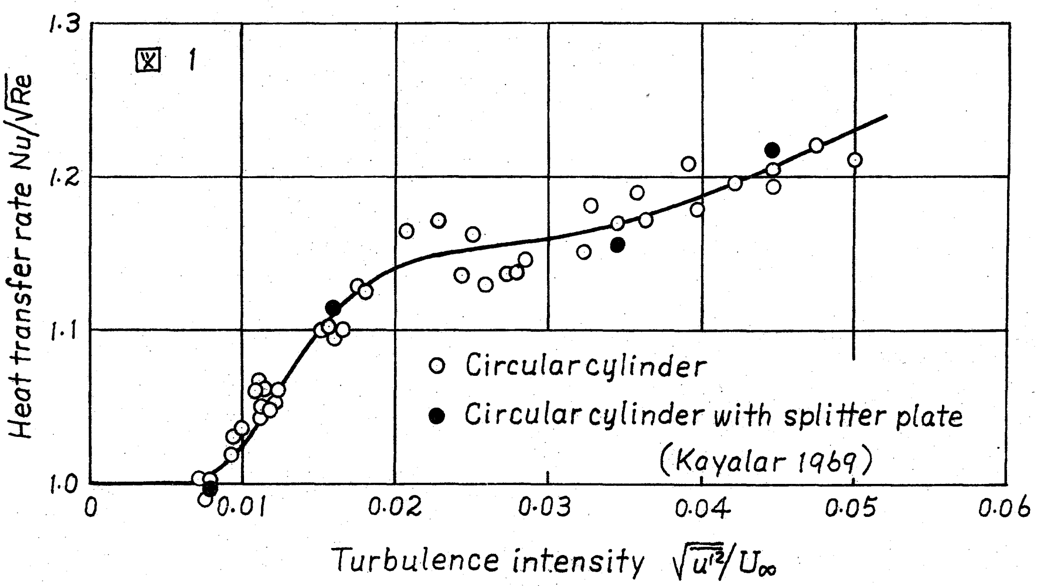
Suteraその他のBrown大学のグループ（1963, 1965, 1970）は，この問題に対して渦度増幅理論と呼ぶものを提案している．渦度成分 $\omega_x=\omega(\eta)\sin\kappa\zeta$ と書くときの ω は，上述の如く（3），または η の大きい値に対して（4）から定まり，（4）の $\eta\to\infty$ に対する漸近解は $\eta-\beta=\sigma$ とおくとき

$$\omega = A\sigma^{-\kappa^2}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2}\left\{1+O(\sigma^{-2})\right\}+B\sigma^{\kappa^2-1}\left\{1+O(\sigma^{-2})\right\} \qquad (6)$$

で与えられる．ここで $\kappa>1$ ならば，$\eta\to\infty$ に対して第2項が発散するので，Hämmerlin の取扱いでは積分定数 $B=0$ と採るわけであるが，渦度増幅理論ではそのような κ を持つ渦度は存在し得ないと考える．つまり淀み点に向かう流れで，外側の η の大きいところから壁面 $\eta=0$ に到達するまでの間に，$\kappa>1$ のような渦度は減衰してしまうと考える．そして特に $\kappa=1$ のものは，外側の流れから壁面までの間に，増幅

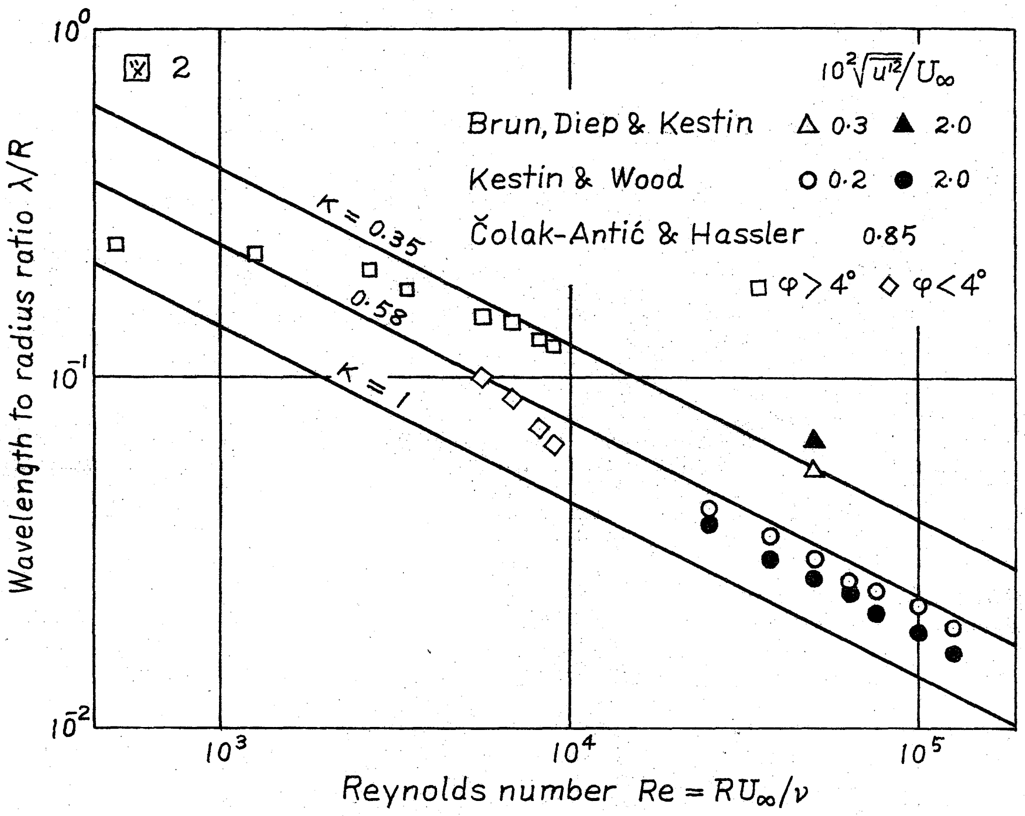
も減衰も受けることがなく，実際に速度変動として観察されるものを代表すると考えるわけである．もっともこれは，改めて理論と呼ぶほどのものでないかも知れない．しかも基礎となる方程式 (4) は，$\eta = 0$ までは適用されないのである．

淀み点の近くの流れの不安定による縦の渦の発生は，壁面の熱伝達や摩擦と密接に関連している．特に淀み点の熱伝達は，一様な流れの乱れ $\sqrt{\overline{u'^2}}/U_\infty$ の増加とともに著しく増加することが実験的に観察され（Smith & Kuethe 1966, Kestin 1966, Kayalar 1969），その一例は図 1 に示されるが，この特異な増



加の現象は，おそらく縦の渦の影響によるものであろうと考えられる．また縦の渦の存在も直接に観察によって明らかにされ（Brun, Diep & Kestin 1969, Kestin & Wood 1969, Čolak-Antić

& Hassler 1971, Euteneuer 1971), z 方向の波長 $\lambda = (2\pi/\kappa)\sqrt{\nu/a}$ の曲率半径 R に対する比は，一様な流れの速度 U_∞ と R に関するレイノルズ数 $Re = RU_\infty/\nu$ の関数として図 2 のように与



えられる．このうち Brun, Diep および Kestin の実験では，乱れを増すと波長が増すが，Kestin と Wood の実験では逆の傾向が見られ，また Čolak-Antić と Hassler の実験では，淀み点の近くで観察される波長は小さく，下流に行くと 2 倍近くに増加する．なお渦度増幅理論による $\kappa = 1$ の曲線は，観察される波長の下限を与えるように見える．

乱れによる淀み点の熱伝達と摩擦の増加について，これを更に量的に説明しようとするいくつかの試みがある．一つは渦度増幅理論によるもので（Sutera, Maeder & Kestin 1963, Sutera 1965），(2) の攪乱の $\alpha=0$, $\kappa=1$ のもの，ならびにその第2高調波を採って外側の乱れを表わし，それが壁面に近づくに従って増幅され，熱伝達と摩擦の増加をもたらすことを計算する．他の一つは Kayalar (1969) によるもので，外側の速度が $u=ax\{1+\varepsilon kx\cos(\alpha t+kz)\}$, $v=-ay\{1+2\varepsilon k^3x^3\cos(\alpha t+kz)\}$, $w=-2\varepsilon ax(1-k^2x^2)\sin(\alpha t+kz)$ で与えられる場合の熱伝達と摩擦を計算する．この速度の表示は主として y 方向に渦度を持つ攪乱を表わし，ε はその大きさを表わす小さい数である．もう一つは Belov と Shub (1970) によるもので，軸対称の淀み流れの摩擦が，外側の流れの方位角の方向の渦度のために増すことを示す計算である．軸対称の淀み流れにおいても，二次元の淀み流れと同様の著しい速度変動が記録され（Kuethe, Willmarth & Crocker 1959），また方位角の方向に周期的に変化する攪乱（半径方向の放射状の渦）が発生することは，熱伝達（Andreev, Dakhno, Savin, Tsirlin & Iudaev 1970），燃焼（斉間・桧垣 1973）などの実験に関連して観察されている．

上記の計算は，乱れによる熱伝達や摩擦の増加を予知する点で，一応の成果を収めている．併しその増加の傾向は単調

であつて，実験の結果の示す特異な増加とは異なつている．乱れがある値を越えると急に熱伝達が増すのは，例えば非線型的な増幅機構を示唆するのではないかと思われる．

そこで再び，淀み流れの安定の解析に立ち戻ることにしよう．平面壁に向かう二次元淀み流れで，孤立固有値が存在しないとすれば，円柱のように曲率半径の有限な壁面の場合に，同じ検討を拡張する価値のあることは，すでにGörtler (1955)の指摘するところであった．併し実際にそのような解析は，最近のKestinとWood の研究(1970)に至るまで試みられることがなかつた．KestinとWood は有限曲率半径の場合でも，近似的には(3)が成り立つものと考え，その中に含まれる関数$F(\eta)$は，ηの小さい値においては平面壁の場合のHiemenz関数と同じであるが，ηの大きい値においては有界になるものと考えた（Hiemenz関数は$\eta\to\infty$に対し$F\to\eta-\beta$）．そうすると，(3)の解の$\eta\to\infty$における性質から，固有値がただ一つ存在し，その値は$K=0.58$となることが推論される．併しこの推論の仮定には疑問があり，得られた結果は信用することができない．飯田(1974)によれば，曲率半径が有限の場合には，(3)は近似的にも成り立たず，またHiemenz関数に相当する関数は，すでにηの小さい値からHiemenz関数と相

違する．その結果，Kestin と Wood が行なつたように，微分方程式の漸近的性質から固有値を推定することは不可能である．飯田は (3) に代わる正しい微分方程式を導き，それを数値的に積分することによつて，固有値を $K=0.35$ と定めた．図 2 の撹乱波長の実験値とレイノルズ数の関係に，Kestin と Wood の $K=0.58$ に対する関係と，飯田の $K=0.35$ に対する関係が記入されている．前者の方が実験値に近いように見えるが，これは偶然の一致と考えるほかはない．

ただ飯田の解析においても，Hiemenz 関数に相当する関数を定める点に疑問がある．この関数は曲率半径有限の二次元淀み流れにおいて，基本速度の流れ関数を表わすものであるが，Kestin と Wood がこれを Hiemenz 関数の無限遠性質だけ修正して得られるとしたのに対し，飯田は曲率の影響を入れる目的で，Navier-Stokes の方程式を円柱曲座標で表わし，それを数値的に積分して流れ関数を求めた（Kestin と Wood も円柱曲座標を用いたが，必要以上に省略を行なつて，上記のようなことになつた）．この流れ関数と Hiemenz 関数の相違は，曲率半径 R と一様流れの速度 U_∞ に関するレイノルズ数 $Re=RU_\infty/\nu$ の逆平方根の程度のものである．併し Navier-Stokes の方程式の解を $1/\sqrt{Re}$ の級数に展開するとき，$1/\sqrt{Re}$ の項は曲率の影響を表わすものと，排除厚の影響を表わすも

のから成り立つはずであり（Van Dyke 1962,1964），飯田の解析では排除厚の影響が省かれている．曲率の影響が局所的であるのに反して，排除厚の影響は局所に限られず，流れの場全体に関係する．つまり淀み点の近くの問題であるのに，下流で流れの剥離が起こるかどうかまで考えねばならぬわけである．もつとも排除厚の影響は，一般に数量的には曲率の影響より小さいので，飯田によつて得られた結果は，それほど誤まつてはいないのかも知れない．

終りに，有限振幅の撹乱の非線型効果について考えておきたい．弱い非線型安定理論（Landau 1944, Meksyn & Stuart 1951, Stuart 1958,1960, Watson 1960,1962）によれば，基本撹乱の無次元振幅Aの無次元時間τによる変化は

$$dA/d\tau = A\left(\alpha_0 + \alpha_2 A^2 + \cdots\cdots\right) \qquad (7)$$

で与えられ，α_0は線型理論における増幅率である．$\alpha_0 < 0$ならば，流れは無限小撹乱に対して安定であるが，撹乱の振幅がある限界を越えると不安定（subcritical threshold instability）を生ずる可能性がある．逆に$\alpha_0 > 0$ならば，流れは無限小撹乱に対して不安定であるけれども，有限振幅の撹乱によつて平衡（supercritical equilibrium）に達する可能性がある．非線型性が弱くて，最初の２項$\alpha_0 A$と$\alpha_2 A^3$だけを考えればよいよ

うな場合には，係数α_2の符号が重要であり，$\alpha_0<0$，$\alpha_2>0$ならば亜臨界不安定，$\alpha_0>0$，$\alpha_2<0$ならば超臨界平衡となる．

淀み点近くの流れについて，このような考察は行なわれたことがないが，筆者は前述の実験結果から見て，おそらく亜臨界不安定の状態が存在するのではないかと想像する．特に一様な流れの乱れによる熱伝達の増加については，乱れによる攪乱がある限界を越えるとき，亜臨界不安定を生じて縦の渦の強さを増すと考えることによつて，図1の特異な増加を説明できるように思われる．また図2で乱れを増すとき縦の渦の波長が減少することは，波長の減少が粘性による減衰を増し，安定化の作用を持つことを考えるとき，やはり亜臨界不安定の存在を示唆するようである．もつとも一つの実験では，乱れを増すとき波長が増すことも注意せねばならない．なお前記の飯田の解析によれば，$\alpha_0=0$の付近で$\alpha_2>0$となるようであつて，亜臨界不安定の可能性が示されている．

最後に，淀み点近くの流れの三次元攪乱による不安定は，比較的に低いレイノルズ数で起こり，Tollmien-Schlichtingの不安定に先行することから，強い圧力降下の存在するにも拘わらず，境界層の流れを早期に乱流に遷移させる可能性のあること（Tani 1973）を付記したいと思う．

文 献

Andreev, A. A., Dakhno, V. N., Savin, V. K., Tsirlin, O. V. and Iudaev, B. N. (1970) Characteristics of heat transfer near the stagnation point for a turbulent jet impinging on a plate situated normal to the flow (in Russian). Mashinostroenie 3, 57-60.

Belov, I. A. and Shub, L. I. (1970) Flow of vortical stream in the neighborhood of the critical point. Fluid Dynamics (English translation of Izvestiya Akademii Nauk SSSR) 5, 973-977.

Brun, E. A., Diep, G. B. et Kestin, J. (1966) Sur un nouveau type de tourbillons longitudinaux dans l'écoulement autour d'un cylindre. C. R. Acad. Sc. Paris A 263, 742-745.

Čolak-Antić, P. (1971) Visuelle Untersuchungen von Längswirbeln im Staupunktgebiet eines Kreiszylinders bei turbulenter Anströmung. Bericht über die DGLR-Fachausschuss-Sitzung "Laminare und Turbulente Grenzschichten", Göttingen, 194-220.

Davey, A. and Schofield, D. (1967) Three-dimensional flow near a two-dimensional stagnation point. J. Fluid Mech. 28, 149-151.

Euteneuer, G. A. (1971) Längswirbel bei der laminaren Umströmung teilweise eintauchender, rotierender Walzen. Forsch. Ing. Wes. 37, 173-176.

Görtler, H. (1955) Dreidimensionale Instabilität der ebenen Staupunktströmung gegenüber wirbelartigen Störungen. Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung (hrsg. v. H. Görtler u. W. Tollmien), Braunschweig, 304-314.

Hämmerlin, G. (1955) Zur Instabilitätstheorie der ebenen Staupunktströmung. Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung (hrsg. v. H. Görtler u. W.Tollmien), Braunschweig, 315-327.

Hassler, H. (1971) Hitzdrahtmessungen von längswirbelartigen Instabilitätserscheinungen im Staupunktgebiet eines Kreiszylinders in turbulenter Anströmung. Bericht über die DGLR-Fachausschuss-Sitzung "Laminare und Turbulente Grenzschichten", Göttingen, 221-239.

飯田誠一 (1974) よどみ近くの流れの安定. 線型および非線型理論による考察. 京大数理解析研究所共同研究集会, 1974年1月28日講演.

Kayalar, L. (1969) Experimentelle und theoretische Untersuchungen über den Einfluss des Turbulenzgrads auf den Wärmeübergang in der Umgebung des Staupunkts eines Kreiszylinders. Forsch. Ing. Wes. 35, 157-167.

Kestin, J. (1966) The effect of free-stream turbulence on heat transfer. Advances in Heat Transfer 3, 1-32.

Kestin, J. and Wood, R. T. (1969) Enhancement of stagnation-line heat transfer by turbulence. Progress in Heat and Mass Transfer 2, 249-253.

Kestin, J. and Wood, R. T. (1970) On the stability of two-dimensional stagnation flow. J. Fluid Mech. 44, 461-479.

Kuethe, A. M., Willmarth, W. W. and Crocker, G. H. (1959) Stagnation-point fluctuations on a body of revolution. Phys. Fluids 2, 714-716.

Landau, L. D. (1944) On the problem of turbulence. Dokl. Ak. Nauk SSSR 44, 311-314.

Meksyn, D. and Stuart, J. T. (1951) Stability of viscous motion between parallel planes for finite disturbances. Proc. Roy. Soc. A 208, 517-526.

Piercy, N. A. V. and Richardson, E. G. (1928) On the flow of air adjacent to the surface of an aerofoil. ARC R. & M. 1224.

Piercy, N. A. V. and Richardson, E. G. (1928) The variation of velocity amplitude close to the surface of a cylinder moving through a viscous fluid. Phil. Mag. (7) 6, 970-977.

Piercy, N. A. V. and Richardson, E. G. (1930) The turbulence in front of a body moving through a viscous fluid. Phil. Mag. (7) 9, 1038-1041.

Sadeh, W. Z., Sutera, S. P. and Maeder, P. F. (1970) Analysis of vorticity amplification in the flow approaching a two-dimensional stagnation point. Z. Angew. Math. Phys. 21, 699-716.

Sadeh, W. Z., Sutera, S. P. and Maeder, P. F. (1970) An investigation of vorticity amplification in stagnation flow. Z. Angew. Math. Phys. 21, 717-742.

斉間厚・桧垣守正 (1973) 衝突噴流火炎(第4報). 第11回燃焼シンポジウム, 1973年12月講演.

Smith, M. C. and Kuethe, A. M. (1966) Effects of turbulence on laminar skin friction and heat transfer. Phys. Fluids 9, 2337-2344.

Stuart, J. T. (1958) On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability. J. Fluid Mech. 4, 1-21.

Stuart, J. T. (1960) On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, I; The basic behaviour in plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech. 9, 353-370.

Sutera, S. P., Maeder, P. F. and Kestin, J. (1963) On the sensitivity of heat transfer in the stagnation-point boundary layer to free-stream vorticity. J. Fluid Mech. 16, 497-520.

Sutera, S. P. (1965) Vorticity amplification in stagnation-point flow and its effect on heat transfer. J. Fluid Mech. 21, 513-534.

Tani, I. (1973) Einige Bemerkungen über den laminar-turbulenten Umschlag in Grenzschichtströmungen. Z. Angew. Math. Mech. 53, T25-32.

Van Dyke, M. D. (1962) Higher approximations in boundary-layer theory, I, II. J. Fluid Mech. 14, 161-177, 481-495.

Van Dyke, M. D. (1964) Higher approximations in boundary-layer theory, III. J. Fluid Mech. 19, 145-158.

Watson, J. (1960) On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, II; The development of a solution for plane Poiseuille flow and for plane Couette flow. J. Fluid Mech. 9, 371-389.

Watson, J. (1962) On spatially-growing finite disturbances in plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech. 14, 211-221.