

## Hopf 方程式に依る Burgers 乱流の解

都立大 理学部 富山 泰伸

### § 1 序論

乱流を構成している無限に多くの自由度をもつ成分間に働く非線形相互作用が難解であるため、乱流の構造を解明することは非常に困難である。その非線形相互作用の問題を解決することこそが乱流理論の中心的テーマであるが、種々の理論は、大別して非線形相互作用の扱い方を Reynolds 数 ( $Re$ ) の大小によって二分して考えることができる。一つは  $Re$  の小さい場合からの近似理論であり、大部分の理論はこれに属するものである。これらの理論は非線形相互作用の近似の不正確さの度合いが、相互作用が強い相互作用であるために、時間の経過と共に顕著に現われる恐れが多分にある。しかも乱流は  $Re$  が大きい場合に起る現象であることから、これらの理論には常にその適用の正否が問題になるであろう。一方、乱流が  $Re$  の大きい場合の現象であるという理由からも、 $Re$  が大

きい極限である非粘性の流れを基にして乱流を扱う方法がある<sup>1)</sup>。しかしこの方法は非粘性の有効な解が得られていないため解析は困難であり、この手法による理論の数は少ない。

この後者に属する方法で現実の乱流を取り扱う一つのステップとして、ここでは Burgers 乱流を対象として一つの試みを行う。Burgers 方程式を基にして扱った乱流、いわゆる“Burgerlence”<sup>2)</sup>がどの程度現実の乱流の対応物となりうるかという点に関しては疑問が残されているが、ここではその問題は触れずに、“Burgerlence”を扱うことにする。

## §2 Burgers 乱流の方程式

Burgers 方程式は次の式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

$R$ : Reynolds 数

速度場  $u(x)$  を Fourier 分解して、大小様々な scale の成分に分けて考える。

$$u(x) = \int v(k) e^{ikx} dk, \quad v(k)^* = v(-k) \quad (2)$$

(1) は (2) によって次のように書き換える。

$$\frac{\partial v(k)}{\partial t} = -\frac{ik}{2} \int v(k') v(k-k') dk' - \nu k^2 v(k) \quad (3)$$

(3) によって支配される流れの統計的表現は Hopf<sup>2)</sup>に従って、次のように表わされる。

$$\frac{\partial \phi[z(k)]}{\partial t} = \frac{1}{2} \iint k z(k) \frac{\delta^2 \phi[z(k)]}{\delta z(k) \delta z(k-k')} dk' dk - \frac{1}{R} \int k^2 z(k) \frac{\delta \phi[z(k)]}{\delta z(k)} dk$$

$$\left( \begin{array}{l} \phi[z(k)] = \int e^{i \int v(k)^* z(k) dk} P[dv] ; \text{特性汎関数} \\ P[v(k)] ; \text{位相分布} \end{array} \right. \quad (4)$$

特性汎関数  $\phi[z(k)]$  は次の条件を満足しなければならない。

$$\left( \begin{array}{l} \phi[z(k)]^* = \phi[-z(k)] \\ \phi[z(k)=0] = 1 \\ |\phi[z(k)]| \leq 1 \end{array} \right. \quad (5)$$

ここでは非粘性の場合を扱うので  $R = \infty$  である。従って、ここで扱う Hopf 方程式は次の式で与えられる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \iint k z(k) \frac{\delta^2 \phi}{\delta z(k) \delta z(k-k')} dk' dk \quad (6)$$

### § 3 特性汎関数

波数空間内の全ての点の速度を一つのベクトルとして表わす連続無限次元の位相空間内で乱流を見ると、乱流を表わす速度ベクトルは時間の経過と共に位相空間内を複雑に動きながら位相空間を塗りつぶしていくであろう。それらの乱流場の実現を示すベクトルの集合の元を  $w(k, \tau)$  で表わし、

$$\xi(\tau) = \int w(k, \tau) z(k) dk$$

上式のように、ベクトル  $z(k)$  の“一次変換”を行うと

$$\phi[z(k)] \rightarrow \phi[\xi(\tau)]$$

と“変数変換”される。

$\phi[Z(k)]$  は汎関数であるから無限次元の変数の関数と見なせば、上の変換によって、新たな  $\xi(t)$  の無限次元の変数の関数に、或は汎関数に書き改められたことになる。

ここでは、この無限次元の変数のこの関数が時間  $t$  を別に  
して

$$\xi = \int w(k) Z(k) dk \quad (7)$$

の一変数で表わされる場合を考察しよう。即ち

$$\phi[Z(k); t] = \phi(\xi, t) \quad (8)$$

$Z(k)$  についての汎関数微分は  $\xi$  の微分に改められる。

$$\frac{\delta}{\delta Z(k)} = \frac{\delta \xi}{\delta Z(k)} \frac{\partial}{\partial \xi} = w(k) \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (9)$$

Hopf 方程式 (6) をこの微分オペレータの変換によって書き改めると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = F[Z(k)] \frac{\partial \phi}{\partial \xi^2} \quad (10)$$

$$F[Z(k)] = \frac{1}{2} \iint \kappa w(k') w(k-k') Z(k) dk' dk$$

(8) のように表わされるには  $F[Z(k)] = F'(\xi)$  とならなければ

ならないから、

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[Z]}{\delta Z(k)} &= \frac{1}{2} \int \kappa w(k') w(k-k') dk' \\ &= w(k) \frac{\partial F'(\xi)}{\partial \xi} \end{aligned}$$

上段右辺は  $\xi$  に依らないから

$$\frac{\partial F'(\xi)}{\partial \xi} = ia \quad ; \quad \text{const.}$$

上式を汎関数積分して

$$F[z(k)] = ia \int w(k) z(k) dk = ia \xi \quad (11)$$

が得られ,  $w(k)$  は次のように定められる関数である。

$$ia w(k) = \frac{1}{2} \int w(k') w(k-k') dk' \quad (12)$$

$w(k)$  を求めるために  $w(k)$  を Fourier 変換して

$$w(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{w}(x) e^{-ikx} dx$$

とすると, (12) は

$$\begin{aligned} \frac{ia}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{w}(x) e^{-ikx} dx &= \frac{k}{2} \int \tilde{w}(x)^2 e^{-ikx} dx \\ &= \frac{i}{2} \left[ |\tilde{w}(x)|^2 e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - 2 \int \tilde{w}(x) \frac{d\tilde{w}(x)}{dx} e^{-ikx} dx \right] \end{aligned}$$

$$|\tilde{w}(x)|^2 e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \text{ が満足されれば} \quad (13)$$

$$= -i \int \tilde{w}(x) \frac{d\tilde{w}(x)}{dx} e^{-ikx} dx$$

$$\text{従って} \quad \frac{d\tilde{w}(x)}{dx} = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{又は} \quad \tilde{w}(x) = 0$$

(13) を満足する解は次のように求められる。

$$\tilde{w}(x) = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} (x - \lambda_n), \quad x_n \leq x \leq x_{n+1} \quad (14)$$

$$2x_n = \lambda_n + \lambda_{n-1}$$

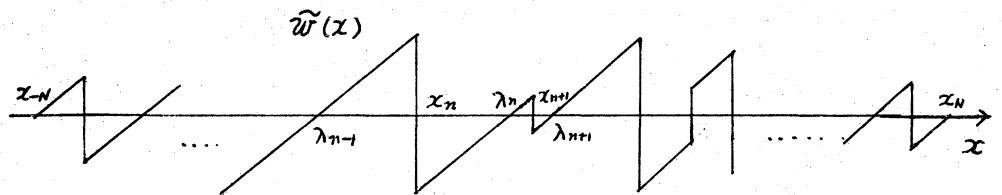


図 1.

$\tilde{w}(x)$  を図示すると図 1 のようになり,  $2x_n = \lambda_n + \lambda_{n-1}$  を満足は,  $x_n, \lambda_n$  はどのようにも選ぶことができる。

$\tilde{w}(x)$  を逆変換して  $w(k)$  を求めると,

$$\begin{aligned}
 w(k) &= -\frac{a}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - \lambda_n) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{a}{2\pi} \left[ -\frac{1}{k^2} (e^{-ikx_N} - e^{-ikx_{-N}}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{i}{k} \sum_{n=1}^{N-1} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{-ikx_n} \right] \quad (15)
 \end{aligned}$$

$x_N = -x_{-N} = X$  とすると

$$w(k) = \frac{a}{2\pi} \left[ \frac{2i}{k^2} \sin(kX) - \frac{i}{k} \sum_{n=1}^{N-1} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{-ikx_n} \right] \quad (15')$$

(15)' で表わされたい  $w(k)$  の  $k \rightarrow 0$  での様子を調べて見ると

$$\begin{aligned}
 w(k) &\rightarrow \frac{a i}{2\pi} \left[ i \sum_{n=1}^{N-1} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) x_n + k \left\{ \frac{1}{2!} \sum (\lambda_n - \lambda_{n-1}) x_n^2 - \frac{X^3}{3!} \right\} \right] \\
 &\quad \sum (\lambda_n - \lambda_{n-1}) x_n = 0 \text{ のとき}
 \end{aligned}$$

$$w(k) \rightarrow \frac{a i}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2!} \sum (\lambda_n - \lambda_{n-1}) x_n^2 - \frac{X^3}{3!} \right\} k. \quad (16)$$

と表わされる。

(15) が満たされるとき  $F[z(k)]$  は(11) のように定まり,  
 $\phi[z(k); t] = \phi(\xi, t)$  と  $\xi$  と  $t$  のみの関数で表わすことができる。

#### § 4 Hopf 方程式の解

$w(k)$  を(15) のように定めることにより,  $F[z(k)]$  は(11) の表現を得る。このとき Hopf 方程式は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = i a \xi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \quad (17)$$

となり, 次の条件を満足しなければならない。

$$\begin{cases}
 1) & \phi(\xi, t)^* = \phi(-\xi, t) \\
 2) & \phi(0, t) = 1
 \end{cases} \quad (18)$$

$$(3) \quad |\phi(\xi, t)| \leq 1$$

(17) の方程式を適当な初期条件と (18) の条件を考慮して、一般的に解くことは現在まで出来ていないので、ここでは、以下のような簡単な解を取り上げて乱流解を構成してみる。

$$\xi/a(t+\tau) = \eta \quad (19)$$

$\phi(\xi, t)$  が (19) で与えられた  $\eta$  のみの関数として表わされる相似解を求めて見よう。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\xi}{a(t+\tau)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = \frac{1}{a^2(t+\tau)^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{cases}$$

これらの変換によって (17) は次のように書き改められる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = -i \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}$$

この解は直ちに次のように得られる。

$$\begin{aligned} \phi(\xi, t) &= C_1 + C_2 e^{i\eta} \\ &= C_1 + C_2 e^{\frac{i\xi}{a(t+\tau)}} \end{aligned} \quad (20)$$

#### 4.1 相似解の性質.

(20) の解は条件 (18) のうち 1) は既に満している。2) と 3) の条件を満足するように  $C_1, C_2$  を定めると次のようになる。

$$\phi(\xi, t) = (1-p) + p e^{\frac{i\xi}{a(t+\tau)}} \quad (p > 0) \quad (21)$$

この解を図示すると図 2 ようになる。

$p = 1$  の解は次式である。

$$\phi(\xi, t) = e^{\frac{i\xi}{a(t+\tau)}} = e^{\frac{i}{a(t+\tau)} \int w(k) Z(k) dk} \quad (21)'$$

この特性関数を逆変換して位相

分布を求めると、

$$P[v(\kappa)] = \delta\left[v(\kappa, t) - \frac{w(\kappa)}{a(t+\tau)}\right]$$

この位相分布は  $v(\kappa, t) = \frac{w(\kappa)}{a(t+\tau)}$

の流れのみが起っている場合に

相応している。従って、この位

相分布で表わされる流れは、 $x_n$

$\lambda_n$ の値を偶然的に選び、 $w(\kappa)$ を与えると、その後は流速が

$v(\kappa, t) = \frac{w(\kappa)}{a(t+\tau)}$  に従って変化する、流れの一つの実現を表現

したものである。

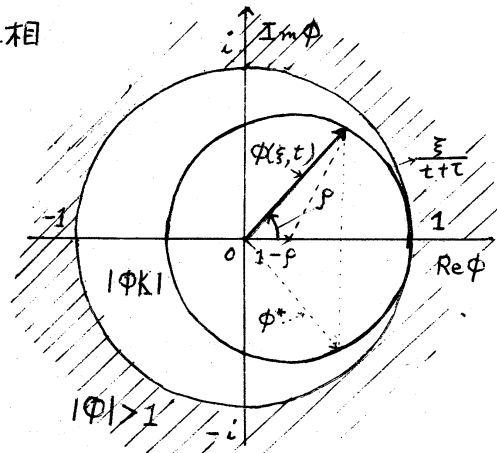


図 2

#### 4.2 相似解から構成される解.

$\phi(\xi, t) \sim e^{\frac{\xi}{a(t+\tau)}}$  は (17) の解であり、方程式 (17) は線型であるから、 $\tau$  をパラメーターとして、これらの解の重ね合せたものもまた (17) を満足する解である。条件 (18) を満たすように注意して解を構成すると。

$$\phi(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{\frac{\xi}{a(t+\tau)}} d\tau \quad (22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau = 1 \quad ; \text{規格化}$$

実際、(18) の条件を上式が満たすことは次のようにしてわかる。

1)  $\phi(\xi, t)^* = \phi(-\xi, t)$  は明らかである。

2)  $\phi(\xi=0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau = 1$



$$\begin{aligned}
 3) \quad |\phi(\xi, t)|^2 &= \iint f(\tau) f(\tau)^* e^{i\xi(\tau'-\tau)/(t+\tau\lambda t+\tau')} d\tau d\tau' \\
 &< \iint f(\tau) f(\tau)^* | e^{i\xi(\tau'-\tau)/(t+\tau\lambda t+\tau')} d\tau d\tau' \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$\phi(\xi, t)$  の初期値を  $\phi(\xi, 0) = \phi_0(\xi)$  とすると, (22) より

$$\left( \begin{aligned}
 \phi_0(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{\frac{i\xi}{a\tau}} d\tau \\
 f(\tau) &= \frac{1}{2\pi a\tau^2} \int \phi_0(\xi) e^{-\frac{i\xi}{a\tau}} d\xi
 \end{aligned} \right. \quad (23)$$

が成り立つ。

$\phi_0(\xi)$  の関数形を決めれば (23) から  $f(\tau)$  の関数も決まり,  $\phi(\xi, t)$  は (22) から決定されるが, ここでは  $f(\tau)$  の適当な関数を仮定して,  $\phi(\xi, t)$  を求め, 更にエネルギー・スペクトルを求めて見よう。

エネルギー・スペクトル  $E(k)$  は (4) を汎関数微分することによって得られる。

$$\begin{aligned}
 E(k) &= \frac{i^2}{\delta(k+k')} \cdot \frac{\delta^2 \phi[Z(k)]}{\delta Z(k) \delta Z(k')} \Big|_{z=0} \\
 &= -\frac{1}{\delta(k+k')} w(k) w(k') \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=0} \quad (24)
 \end{aligned}$$

例 1

$$\left. \begin{aligned}
 f(\tau) &= \frac{4\sigma}{\pi} \frac{1}{1+\sigma^2\tau^2} & ; \tau \geq 0 \\
 &= 0 & ; \tau < 0
 \end{aligned} \right) \quad (25)$$

$f(\tau)$  を上のように仮定する。(22) より  $\phi(\xi, t)$  が発散しないように  $\tau < 0$  の  $f(\tau)$  を零とした。

(25) を (22) に代入して  $\phi(\xi, t)$  を得る。

$$\phi(\xi, t) = \frac{4\sigma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\sigma^2\tau^2} e^{i\frac{\xi}{a(t+\tau)}} d\tau \quad (26)$$

エネルギー・スペクトルを得るために  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=0}$  を求めよ

う。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} &= \frac{4\sigma}{\pi a} \int_0^{\infty} \frac{\sigma \tau}{(t+\tau)(1+\sigma^2\tau^2)} \\ &= \frac{i\sigma}{a(1+\sigma^2 t^2)} \left( \sigma t - \frac{4}{\pi} \log \sigma t \right) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=0} &= \frac{1}{ia} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2(1+\sigma^2 t^2)^2} \left[ \frac{4}{\pi\sigma} \frac{1+\sigma^2 t^2}{t} - (1-\sigma^2 t^2) - \frac{8\sigma t}{\pi} \log(\sigma t) \right] \quad (27) \end{aligned}$$

(24) と (27) からエネルギー・スペクトルは次のように求められる。

$$E(k) = \frac{\sigma^2 w(k)w(-k)}{a^2 \delta(0)(1+\sigma^2 t^2)^2} \left[ \frac{4}{\pi\sigma} \frac{1+\sigma^2 t^2}{t} - (1-\sigma^2 t^2) - \frac{8\sigma t}{\pi} \log(\sigma t) \right] \quad (28)$$

$t \rightarrow \infty$  とすると次の式のように  $t^{-2}$  に比例して減衰する。

$$E(k) \propto \frac{w(k)w(-k)}{t^2}$$

$t \rightarrow 0$  では (28) は発散してしまうが、これは  $t=0$  で  $f(t) = \text{finite}$  であるためのものである。

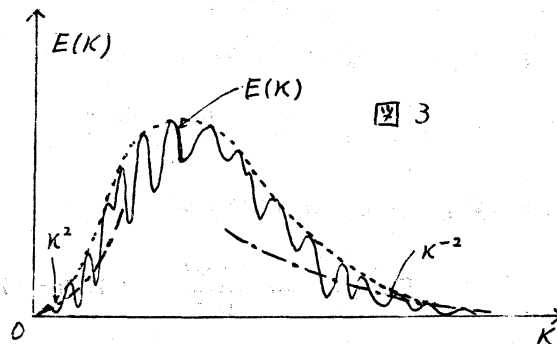
$E(k)$  の  $k$  についての関数形は概略図 3 で示されている。

$k \rightarrow 0$  :

$$E(k) \propto w(k)w(-k) \rightarrow \underline{k^2}$$

$k \rightarrow \infty$  ;

$$E(k) \rightarrow \underline{\frac{1}{k^2} G(k)}$$



$w(k)w(-k)$  は (15)' から求められる。(15)' からわかるように  $w(k)^* = w(-k)$  であるから  $w(k)w(-k) = w(k)w(k)^* \geq 0$  である。

$$w(k)w(-k) = \frac{a^2}{(2\pi)^2} \left[ \frac{4}{k^4} \sin^2(kX) - \frac{4}{k^3} \sin(kX) \sum (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \cos(kx_n) + G(k) \right] \quad (29)$$

$$G(k) = \frac{1}{k^2} \left\{ \sum_n (\lambda_n - \lambda_{n-1})^2 + 2 \sum_{n < m} (\lambda_n - \lambda_{n-1})(\lambda_m - \lambda_{m-1}) \cos k(x_n - x_m) \right\}$$

例 2

$$\left. \begin{aligned} f(\tau) &= \frac{1}{\sigma \tau^2} e^{-\frac{1}{\sigma \tau}} & ; \tau \geq 0 \\ &= 0 & ; \tau < 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$f(\tau)$  を上のようになおすと (22) から

$$\phi(\xi, t) = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau^2} e^{-\frac{1}{\sigma \tau} + \frac{i\xi}{a(t+\tau)}} d\tau. \quad (31)$$

が得られ、この上式を  $\xi$  で微分を行い、 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=0}$  は得られる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=0} = -\frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{t^2} \left(1 + \frac{1}{\sigma t}\right) + \frac{1}{\sigma t^3} \left(2 + \frac{1}{\sigma t}\right) e^{\frac{1}{\sigma t}} E_i\left(-\frac{1}{\sigma t}\right) \right] \quad (32)$$

$$E_i(-x) = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \quad ; \text{積分指数関数}$$

この時のエネルギー・スペクトルを下に示す。

$$E(k) = \frac{w(k)w(-k)}{a^2 \delta(0)} \left[ \frac{1}{t^2} \left(1 + \frac{1}{\sigma t}\right) + \frac{1}{\sigma t^3} \left(2 + \frac{1}{\sigma t}\right) e^{\frac{1}{\sigma t}} E_i\left(-\frac{1}{\sigma t}\right) \right] \quad (33)$$

$t \rightarrow \infty$  の極限においては

$$E(k) \rightarrow \frac{w(k)w(-k)}{a^2 t^2}$$

$t \rightarrow 0$  の時の  $E(k)$  のふるまいは下のようになる。

$$E(k) \rightarrow \frac{2\sigma^2}{a^2} w(k)w(-k)(1 - bt)$$

## § 結び

$f(t)$  の選び方によってエネルギー・スペクトルの時間変化の違いは、初期においては大きいが、時間が過つにつれてその差異は小さくなり  $t^{-2}$  に比例するようになる。

ここでの Burgers 乱流の取り扱いは  $w(k)$ 、従ってエネルギー・スペクトルは波数と時間の変数分離形で求められており、スペクトルの形は、初期において適当に与えられた後は時間が経過しても相似な形を保つのである。 $\phi[Z(k)]$  が

$\phi(\xi, t)$  の形で求められるとした要請から、上の結果は必然的に求められるものである。 $\phi[Z(k)]$  が  $\xi_1 = \int w_1(k) Z(k) dk$ ,  $\xi_2 = \int w_2(k) Z(k) dk, \dots$  のような  $\xi_1, \xi_2, \dots$  の変数の関数であると拡張することによって、スペクトルの相似な形は変形されていくであろう。このような拡張は今後の課題としよう。

## 参考文献

- 1) T. Tatsumi : Phys. Fluids Supp. II 258 (1969)
- 2) E. Hopf ; J. Rat. Mech. Anal. I 87 (1952)