

## 146

Provo de nombra solvado de tri-dimensia ekvacio de Navier-Stokes

de

Hideo Takami, Kunio Kuwahara, kaj Mahito Koumoto

Departemento de Aplikata Fiziko

Fakultato de Inĝenierscienco

Universitato de Tokio

### §1. Enkonduko

Detalaj kaj fidindaj nombraj esploroj de Navier-Stokes' a ekvacio komenciĝis de la historia traktaĵo de Kawaguti (1953). Disvolviĝo de rapidaj komputeroj kaj de nombraj metodoj de solvado de diferencialaj ekvacioj ebligis pli rapidan kaj pli detalan solvado de Navier-Stokes' a ekvacio. Tamen, esploroj en tiu ĉi direkto plejparte estas limigitaj al du-dimensia fluo, probable ĉar solvado de tri-dimensia problemo bezonas pli multe da kalkultempo kaj malebligas la simplan traktadon per skalaraj flu- kaj vorticofunkcioj. En la okazo de tri-dimensia fluo, estas necese uzi la premon kaj la tri komponantojn de la flu-rapido kiel primaraj variabloj, se oni ne deziras enkonduki embarasan vektoran flufunkcion. Kiel promesoplenaj metodoj por tri-dimensia problemo ni menciuj precipe MAC-metodon (Harlow kaj Welch, 1965) kaj la metodon de Chorin (1968).

En ĉi tiu traktaĵo, ni unue proponos nombran kalkulskemon por tempodependa Navier-Stokes' a ekvacio en la formulado per rapido kaj premo. Ĝi estas esence la sama kiel la skemo de Chorin sed multe pli simpligita, kaj samtempe havas rilaton al tiu de MAC. Due, ni aplikos nian metodon al kalkulado de du-dimensia fluo en kvadrata kavo kaj de tri-dimensia fluo en kuboforma kavo. La detaloj de kalkulskemo uzita diferencas unu de alia en du-dimensia kaj tri-dimensia problemoj (Skemo I kaj Skemo II). La skemo uzita en la dua problemoj montris sin superanta la unuan kaj sufiĉe uzebla en aktuala kalkulo. Laste, ni komparos la rezulton pri tri-dimensia fluo kun tiu pri du-dimensia fluo kiu estas jam tre detale kalkulita de kelkaj aŭtoroj

(Burggraf, 1966; Ozawa). Nia kalkulo evidentigis ke la efekto de la flankaj muroj estas konsiderinde malgranda en ĉiuj okazoj, kaj la fluo povas esti rigardata du-dimensia plejparte de la flukampo.

## §2. Formulado de la problemo

Ni deziras solvi Navier-Stokes'an ekvacion (ekvacion de konservo de momentum) kaj la ekvacion de kontinuo (ekvacion de konservo de maso):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$(2.2)$$

sub iuj komenco- kaj limokondiĉoj. En (2.1) kaj (2.2)  $\mathbf{v}$  signifas la flurapidon,  $p$  la premon kaj  $R$  la nombron de Reynolds; ĉiuj kvantoj estas sendimensiigitaj.

Por trakti la problemon en la maniero nedependa de la dimensio, ni transformos ilin en

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_t + \nabla p = \mathbf{F}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_t = 0, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

kie

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_t = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \\ \mathbf{F} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{v}. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

Ekvacioj (2.3) kaj (2.4) esprimas ke la kampo de la tempo-derivaĵo de rapido  $\mathbf{v}_t$  kaj tiu de la spacoderivaĵo de premo  $\nabla p$  estas respektive la solenoida kaj la senrotacia partoj de la vektora kampo  $\mathbf{F}$ . Laŭ la teoremo de Helmholtz'a malkomponado de vektora kampo, tia malkomponado estas ĉiam ebla, kaj krome estas unika se oni postulas nuliĝon de la normalderivaĵo de la

solenoida parto sur la limo de la kampo. En nia problemo, la rapido  $\mathbf{v}$  estas donita sur la limo tiel ke  $\mathbf{v}_t = 0$  en ĉiu momento, kaj sekve la malkomponado estas unika.

Tial ni povas rigardi la fluon kiel determinata ĉiumomente laŭ la sekvanta skemo:

(i) Vektora kampo  $\mathbf{F}$  estas determinata de la rapidokampo ĉe la momento  $t$ .

(ii) La tempoderivaĵo  $\mathbf{v}_t$  estas determinata de  $\mathbf{F}$  kiel ĝia solenoida parto.

(iii) La  $\mathbf{v}$ -kampo ĉe la momento  $t + \Delta t$  estas determinata de ambaŭ  $\mathbf{v}$  kaj  $\mathbf{v}_t$  ĉe  $t$ .

### §3. Diferenc-aproksimado kaj la skemo de nombra kalkulado

(Skemo I)

Por solvi (2.1) kaj (2.2) nombre, ni sekvas per diferenc-aproksimado ĝuste la skemon skizitan en §2.

Nia kalkulskemo (Skemo I) estas:

(i) Per la rapidokampo  $\mathbf{v}$  ĉe la momento  $t$ , kalkuli  $\mathbf{F}$ -kampon laŭ

$$\mathbf{F}_h = -(\mathbf{v} \cdot \nabla_h) \mathbf{v} + \frac{1}{R} \Delta_h \mathbf{v}, \quad (3.1)$$

kie  $h$  estas la longo de la spacmaŝo, kaj la simboloj kun  $h$  almetita signifas iujn diferenc-analogaĵojn, kies konkretaj formoj estos donata poste.

(ii) Plenumi la procedon de Helmholtz' a malkomponado per la iteracia skemo

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_t^{(n)} = -\nabla_h \rho^{(n)} + \mathbf{F}_h, \\ \rho^{(n+1)} = \rho^{(n)} - \varepsilon \nabla_h \cdot \mathbf{v}_t^{(n)}, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$(3.3)$$

kie la indico  $n$  signifas la  $n$ -an iteraciaton kaj  $\varepsilon$  iun malgrandan parametron. Eliminado de  $\mathbf{v}_t^{(n)}$  el (3.2)-(3.3) donas la ekvacion

$$\frac{\rho^{(n+1)} - \rho^{(n)}}{\varepsilon} = \Delta_h \rho^{(n)} - \nabla_h \cdot F. \quad (3.4)$$

Ĉi tiu ekvacio povas esti rigardata kiel diferenc-analogaĵo al la ekvacio de varmokonduko ( $\nu$  estas rigardata kiel imagita tempovariablo). Tial ni povas esperi ke nia iteracia procedo por Helmholtz'a malkomponado konverĝos se ni pagos ĝustan prienson pri la stabileco de la iteracia diferencoskemo.

(iii) Kalkuli la rapidokampon ĉe la momento  $t + \Delta t$  ( $\Delta t$  estas malgranda pliiĝo de la tempo) per tiu ĉe la momento  $t$  kaj ĝia tempoderivaĵo akirita en (ii), laŭ la formulo

$$v(x, t + \Delta t) = v(x, t) + v_t(x, t) \Delta t. \quad (3.5)$$

Por garantii la stabilecon, ankaŭ estas necesa pripenso pri la malgrandeco de  $\Delta t$  en komparo kun la maŝlongo  $h$ .

#### §4. Aplikado de Skemo I al du-dimensia fluo en kvadrata kavo

Por ekzameni nian kalkulskemon, ni aplikos ĝin al kalkulado de tempodependa fluo en la interno de kvadrata kavo  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  (Fig.1). La fluido restas senmova, kaj la lima muro  $y = 1$  moviĝas abrupte ĉe la momento  $t = 0$  kun unita rapido en ĝia ebena.

Kiel kutime, ni alprenos kradon de kvadrataj maŝoj kun maŝlongo  $h$ .

La vektoron  $F_h$  ni kalkulas laŭ (3.1), uzante centro-diferencajn esprimojn de duagrada akurateco por  $\nabla_h$  kaj  $\Delta_h$  (ni bezonas valorojn de  $F_h$  nur ĉe la internaj maŝpunktoj). Ni uzas ankaŭ la saman esprimon por  $\nabla_h$  en (3.2). Ĉar ni bezonas la valorojn de  $\rho^{(n)}$  ankaŭ sur la limo, ni uzas unuflankan diferencesprimon de duagrada akurateco por  $\nabla_h$  en (3.3) se ĝi estas necesa.

La parametro  $\varepsilon$  en (3.3) devas esti elektita tiel ke ĝi garantiu la stabilecon de la iteracia procedo (3.2)-(3.3).

Kiel la kriterio de konverĝo de la iteraciado ni postulos ke  $|\nabla_h \cdot v_t^{(n)}|$  ĉe ĉiu maŝpunkto fariĝu pli malgranda ol preskribita nombro  $\delta$  :

$$\max |\nabla_h \cdot v_t^{(n)}| < \delta. \quad (4.1)$$

Laste, la valoro de tempopliĝo  $\Delta t$  devas esti determinata laŭ la stabileca kriterio por la skemo (3.5). Ĉi tio dependas ne nur de la maŝlongo, sed ankaŭ de la Reynolds'a nombro. Ĉar la teoria derivado de la kriterio estas preskaŭ nebla, ni taksos ĝin "eksperimente" per kelkaj ekzamenaj kalkuloj.

Ni donis en Tabelo 1 la valorojn de diversaj parametroj uzitaj en la finaj kalkuloj (Koumoto, 1973).

Tabelo 1

$R$	$h$	$\varepsilon$	$\delta$	$\Delta t$
0,10,50,100	1/11	$0.6 \times 10^{-2}$	$2 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-3}$
400	1/11	$0.6 \times 10^{-2}$	$2 \times 10^{-4}$	$0.5 \times 10^{-3}$

$R$  estas difinita tiel de  $R = 1$  por  $\nu = 1$  ( $\nu$  estas la koeficiento de kinematika viskozeco). En la okazo de  $R = 0$ , Ekv. (2.1) devas esti transformata per konvena sendimensiigo tiel ke  $R$  ne aperu en la denominatoro. La stabileca kriterio por (3.2)-(3.3) estas  $\varepsilon \leq 11^{-2}$ .

La komencokondiĉo estas ke  $v = (1,0)$  ĉe la maŝpunktoj sur  $y = 1$ , kaj  $v = (0,0)$  ĉe ĉiuj aliaj. Kiel la komencaj valoroj de la premo  $p^{(0)}(x, t)$  en malkomponado (3.2)-(3.3), ni uzas la valorojn de  $p(x, t - \Delta t)$ ; ni komencas malkomponadon ĉe  $t = 0$  kun  $p^{(0)}(x, 0) \equiv 0$ .

Kelkaj fazoj de la fluo kalkulitaj per nia skemo estas montritaj en Fig.2. Kvankam la akurateco de nombra rezultato ne estas granda pro nemalgrandeco de la maŝlongo, ni povas diri ke la skemo funkcias bone.

Ni devas rimarkigi ke la valoro 1/11 estis uzita por la maŝlongo anstataŭ 1/10. Prepara kalkulo kun  $h = 1/10$  montris

ke malgranda zigzago aperas en la rapido- kaj premodistribuoj, kvankam tio neniam evoluis al diverĝado. Nia iteracia diferencoskemo rilatigas nur la valorojn de variabloj ĉe ĉiu dua maŝpunkto, kaj tio estas la kaŭzo de la apero de zigzago. En efektiveco, anstataŭigo per  $1/11$  komplete malaperigis la zigzagon de la rapido. Tamen, la cirkonstanco ne estis plibonigita pri la premo, supozeble ĉar ni havas nenian limokondiĉon por ĝi.

Alia rimarko estus necesa. Ĉiu iteracia procedo de malkomponado (3.2)-(3.3) finiĝas kiam ni havas neegalecan rilaton (4.1). Operaciante  $\nabla_h$  skalare al (3.5) kaj uzante (4.1), ni akiras nur malriĉan taksadon por  $\nabla_h \cdot v$  ĉe la momento  $t$ :

$$\max |\nabla_h \cdot v| < \delta \cdot t. \quad (4.2)$$

Tial estus necese alpreni ekstreme malgrandan  $\delta$  se ni dezirus havi rezultaton por tre granda  $t$ .

La du suprediritaj malfacilaĵoj estos komplete solvataj per Skemo II prezentota en §5.

#### §5. Skemo II kaj tri-dimensia fluo en kuboforma kavo

Skemo I montris sin iamaniere uzebla sed ne sufiĉe kontentiga en du punktoj menciitaj en la fino de §4. En ĉi tiu paragrafo, ni prezentos plibonigitan kalkulskemon (Skemo II), kaj kalkulos solvon de tempodependa tri-dimensia fluo en la interno de kuboforma kavo.

Anstataŭ (3.2)-(3.3) ni alprenos jenan iteracian procedon por Helmholtz' a malkomponado:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t^{(n)} = -\nabla_h p^{(n)} + F_h, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p^{(n+1)} = p^{(n)} - \varepsilon \nabla_h \cdot \left( v_t^{(n)} + \frac{1}{\Delta t} v \right). \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Kvankam la diferenco estas nur  $v_t^{(n)} + v / \Delta t$  en (5.2) anstataŭ  $v_t^{(n)}$  en (3.3), tio ĉi kondukos al esenca plibonigo. La kriterio de konverĝo de la iteracia procedo (5.1)-(5.2) estu

$$\max |\nabla_h \cdot \left( v_t^{(n)} + \frac{1}{\Delta t} v \right)| < \delta, \quad (5.3)$$

anstataŭ (4.1) por Skemo I. Tio ĉi kriterio tamen garantias ke  $\nabla_h \cdot v$  restas malgranda ĉe ĉiu momento kiel ĝi devas, ĉar operaciado de  $\nabla_h$  al (3.5) donas pro (5.3) neegalecan rilaton

$$\max |\nabla_h \cdot v| < \delta \cdot \Delta t. \quad (5.4)$$

Ni aplikos nian novan skemon al problemo — la tri-dimensia analogo al tiu diskutita en §4. La fluido restas senmova en kuboforma kavo  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , kaj la lima muro  $y = 1$  moviĝas abrupte ĉe la momento  $t = 0$  kun rapido 1 en ĝia ebena (Fig.3)

Ni alprenos tri-dimensian kradon konsistantan el kuboformaj ĉeloj de latera longo  $h$ . Ĉi tiun kradon ni metas tiel ke la limaj muroj de la kavo trairu centrojn de la ĉeloj (Fig.4).

La valoroj de la premo estos determinata ĉe la centro de ĉiu ĉelo. Koncerne vektorajn variablojn, la  $x$ -komponentoj estos determinataj ĉe la centro de ĝia flanko ebena perpendikla al la  $x$ -akso, ktp (Fig.5).

Kiel la operatoroj  $\Delta_h$  en (3.1) kaj  $\nabla_h$  en (3.2)-(3.3), ni alprenos centrodiferencajn esprimojn de duagrada akurateco. Kontraŭe, unuflanka diferencesprimo per punktoj prenitaj alvente de la sama akurateco estos uzata por  $\nabla_h$  en (3.1), por plibonigi la stabilecon de la procedo (3.5).

Se la valoro de iu variabla estas bezonata ĉe la punkto kie ĝi ne estas donita, ĝi estos kalkulata kiel la meznombro de la valoroj ĉe la plej proksimaj kvar maŝpunktoj.

Koncerne valorojn ĉe la punktoj sur la limo, ekstrapolado de duagrada akurateco estos alprenata se estas necese.

Kun ĉi tiu fiksado, ne aperas en rapido- aŭ premodistribuo kia ajn zigzago kiel observitan en la kalkulo per Skemo I.

En Tabelo 2 estas donitaj la alprenitaj valoroj de la diversaj parametroj.

Ni interesiĝas precipe en la efiko de la flankaj muroj, kaj tial donis figurojn montrantajn komponanton de la rapido laŭlonge de kelkaj linioj imagitaj en la kavo en la fina periodo kiam la fluo fariĝis neŝanĝanta kun tempo.

Tabelo 2

$R$	$h$	$\varepsilon$	$\delta$	$\Delta t$	$T_\infty$
0	1/20	$\varepsilon_1$	$10^{-4}$	0.02	10 min.
100	1/20	$\varepsilon_1$	$10^{-6}$	0.025	30 min.
400	1/20	$\varepsilon_1$	$10^{-5}$	0.025	1 h.

$\varepsilon_1$  estas nombro iomete malgranda ol 1/2400, ĉar la stabileca kriterio postulas ke  $\varepsilon \leq 1/2400$ .  $T_\infty$  signifas la tempon bezonitan por kalkulado ĝis kiam la rapido kaj la premo fariĝas konstanta en ses ciferoj. (Estis uzita la sistemo de HITAC 8800-8700 de Universitato de Tokio.)

En Fig.6 ni donis la  $x$ -komponenton de la rapido laŭlonge de la linio  $x = 0.5$ ,  $z = 0.5$ , kie la  $z$ -komponento nuliĝas pro simetrio. Por komparo estas donita en la sama figuro tiu de la du-dimensia fluo.

Ankaŭ en Fig.7 ni donis la  $x$ -komponenton de la rapido laŭlonge de linioj paralelaj al la  $z$ -akso. Ni povas vidi en Fig.7 ke la efiko de la flankaj muroj estas konsiderinde malgranda kaj la fluo restas preskaŭ du-dimensia plejparte de la flukampo.

#### §6. Pri nombra solvado de tri-dimensia problemo

Kiel ni vidis en §5, Skemo II montris sin sufiĉe kontentiga por solvi tri-dimensian problemon de Navier-Stokes'a ekvacio. Koncerne internan problemon, ne aperus kia ajn malfacilaĵo pri ĉi tiu kalkulskemo, almenaŭ principe. Malgraŭ tio, ni ankoraŭ havas seriozan problemon el la vidpunkto de praktikeco, t.e., tiun de tro longa tempo bezonata por kalkulado. En Tabelo 2 ni donis kalkultempojn  $T_\infty$  bezonitan por atingi la konstantan staton de la fluo. La valoro 1 horo por  $T_\infty$ , ekzemple, ne estus tro granda per si mem, sed la kalkultempo pligrandiĝos rapidege kun la nombro  $N$  de maŝpunktoj uzataj (krado  $20 \times 20 \times 20$  por  $R =$



400 estas tro kruda se oni deziras esplori la fluon iom ajn detale). Simpla taksado montras ke  $T_\infty$  pligrandiĝas proporcie almenaŭ al  $N^2$ , t.e., al  $h^{-6}$  —  $h^{-3}$  pro la nombro de maŝpunktoj,  $h^{-2}$  pro la stabileca postulo por iteraciado (5.1)-(5.2), kaj almenaŭ  $h^{-1}$  pro tiu de (3.5). Tio signifas ke duonigo de la maŝlongo rezultos en 64-obligo de la kalkultempo. Kelke da plirapidigo de kalkulado estus realigebla, per plibonigo en detaloj de la kalkulskemo, aŭ kiam estas bezonata nur la konstanta stato ĉe  $t \rightarrow \infty$ . En efektiveco, kelkaj ekzamenaj kalkuloj montris ke ni povas duonigi aŭ trionigi la tempon, uzante relative grandan valoron de  $\delta$  en la plejmulto de kalkulado kaj anstataŭigante ĝin per malgrandan valoron en la fina periodo.

Ni devus konkludi el ĉio ĉi tio, ke detala kaj ampleksa nombra kalkulado de la solvoj de tri-dimensia Navier-Stokes' a ekvacio estus efektivigota nur per komputeroj de la venonta generacio.

Ĉi tiu esploro povis esti efektivigita per la subvencio de la Ministerio de Eduko. La nombra kalkulado estis plenumita per la sistemo de HITAC 8800-8700 de la Centro de Komputero, Universitato de Tokio.

Ĉi tiu traktaĵo estas dediĉita al Profesoro Isao Imai por celebri lian sesdekan naskiĝtagon.

#### Referencoj

- Burggraf, O. R. 1966: J. Fluid Mech. 24, 113.  
 Chorin, A. J. 1968: Math. Comp. 22, 745.  
 Harlow, F. H. and Welch, J. E. 1965: Phys. Fluids 8, 2182.  
 Kawaguti, M. 1953: J. Phys. Soc. Japan 8, 747.  
 Koumoto, M. 1973: Tezo, Dep. de Apl. Fiz., Univ. de Tokio.  
 Ozawa, S.: J. Phys. Soc. Japan (aperonta).

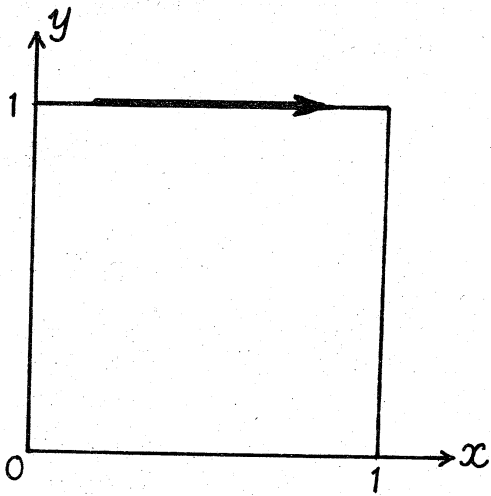


Fig. 1  
Fluo en kvadrata kavo

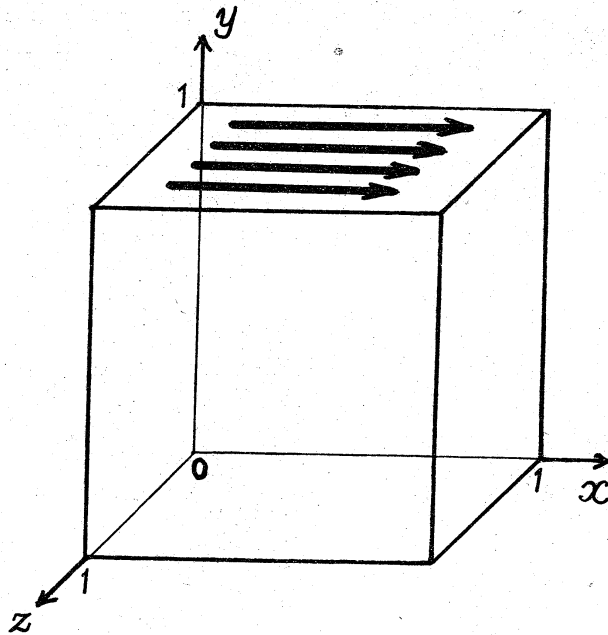


Fig. 3  
Fluo en kuboforma kavo

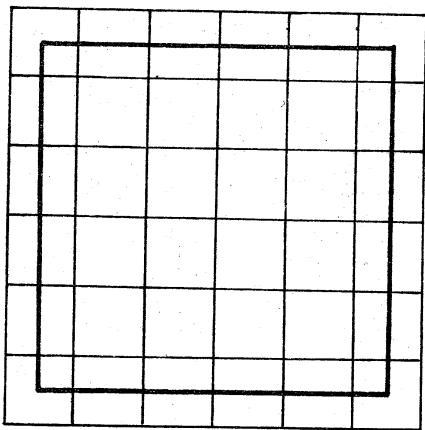


Fig. 4  
Geometrio de la krado kaj  
la limo de la flukampo  
(projekcio sur  $x,y$ -ebeno).

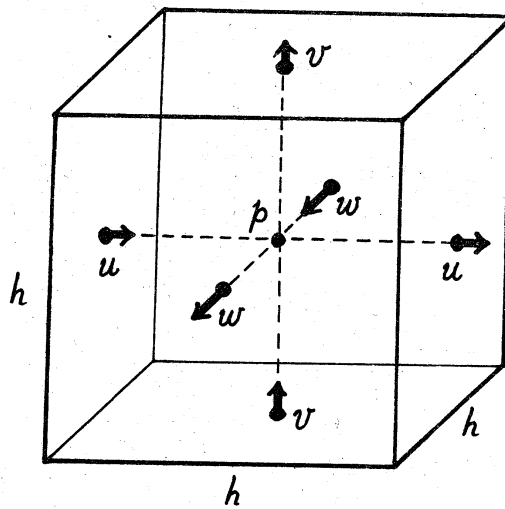
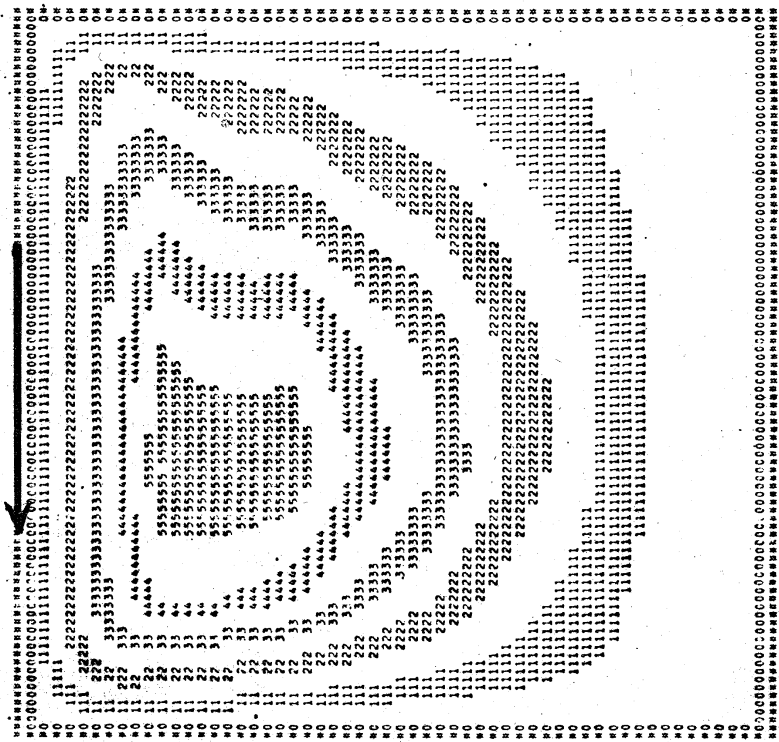
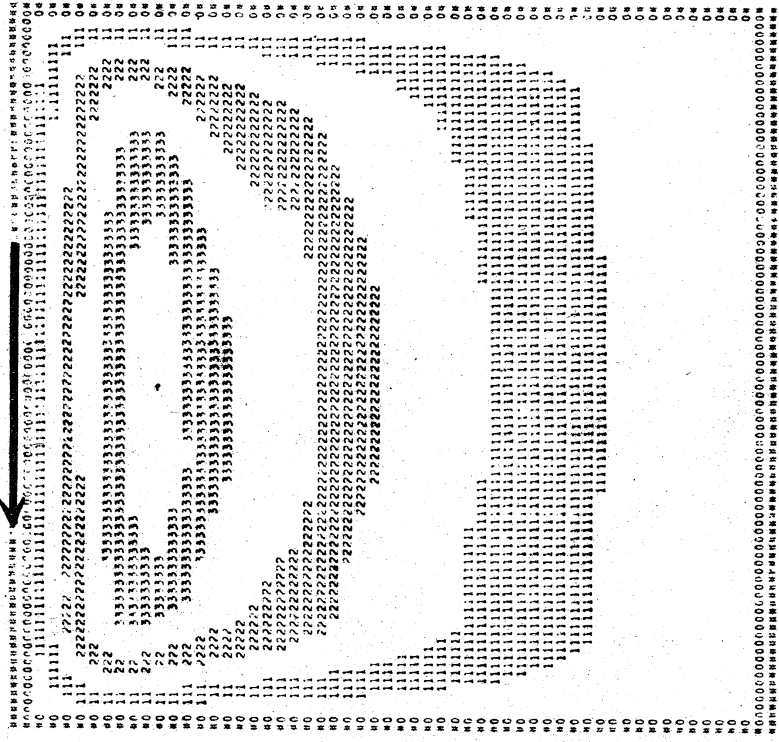


Fig. 5  
Elementa ĉelo kaj la lokoj  
kie diversaj variabloj  
estas determinataj.



$t = 0.242$



$t = 0.006$

Fig. 2

Du fazoj de la fluo en kvadrata kavo en la okazo de  $R = 100$ . Konturoj indikas la fluliniojn.

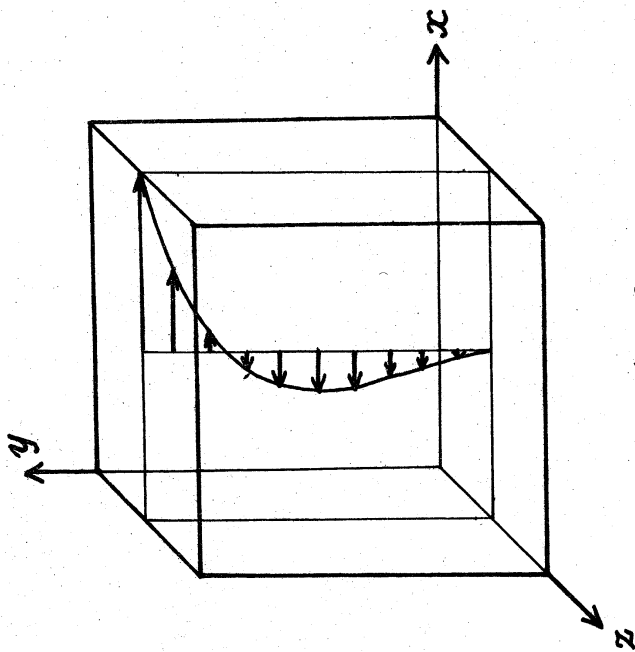
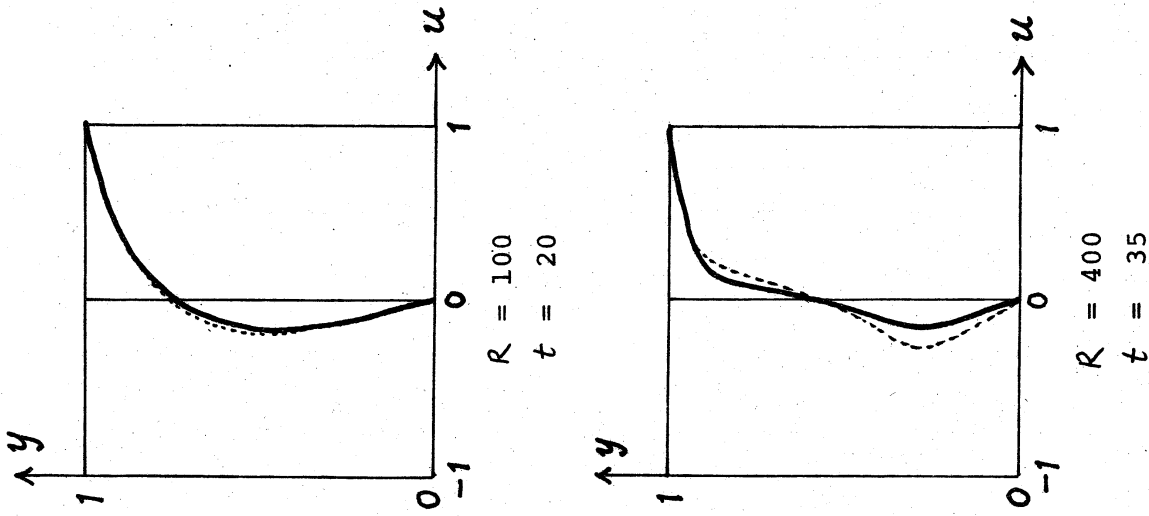


Fig. 6

Profiloj de la  $x$ -komponento de la rapido sur la linio

$x = 0.5, z = 0.5.$

— nuna kalkulo

----- kalkulo de Burggraf

(du-dimensia; krado

40 x 40)

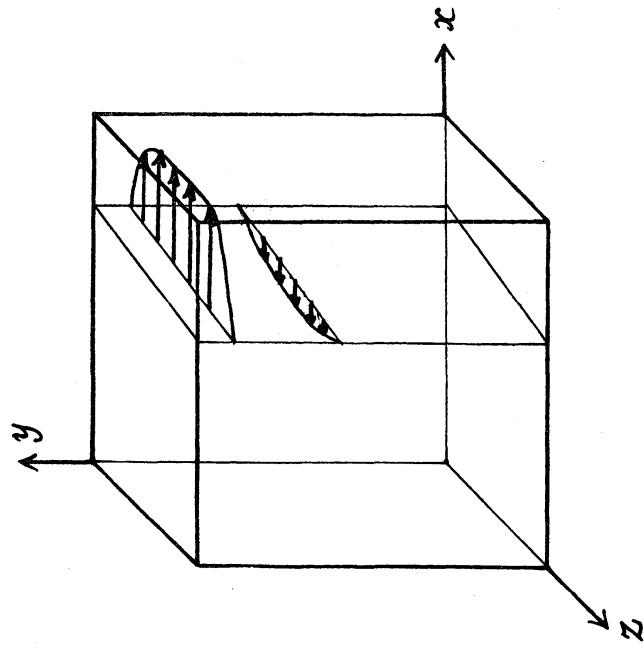
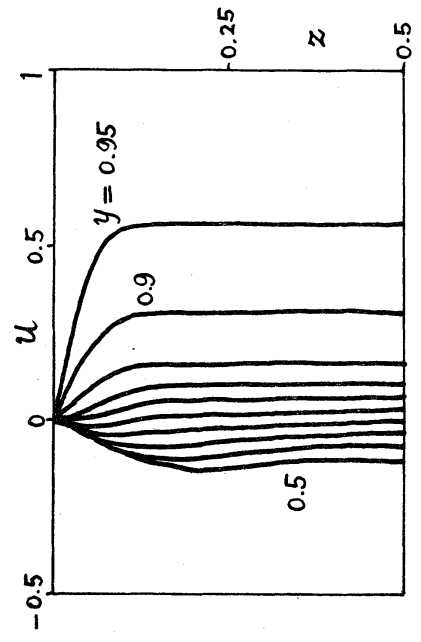
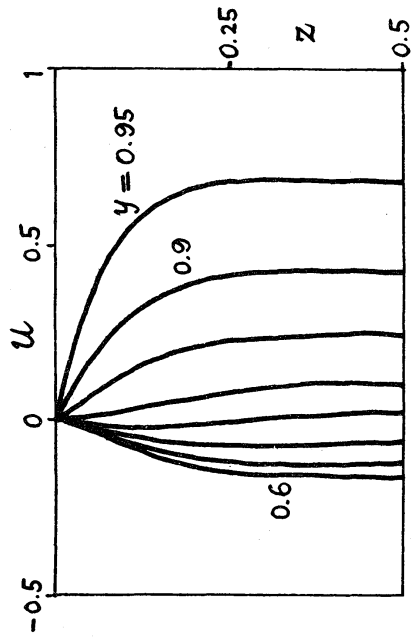


Fig. 7  
 Profiloj de la  $x$ -komponanto  
 de la rapido sur linioj  
 paralelaj al la  $z$ -akso.