

非線形変調波のくずれ

九丈 志力研 矢島信男

§ 1 はじめに

分散媒質中を伝播する平面波が、非線形性と分散性のために、自己変調や自己収束の現象を示すことはよく知られている。ここでは、このような変調波や収束波の、進行方向に対して横方向の擾動に対する安定性を論ずる。

今考えている波動の波数を k 、振動数を ω 、振幅を ϕ としよう。これらの量の間には、

$$\omega = \omega(|k|, |\phi|^2) \quad (1)$$

という非線形分散関係があるものとする。等方性媒質を考えているので、 ω は k の大きさによりのみ依存するとした。平面波の波長 ($\approx 2\pi/|k|$) にくらべて、変調や収束を特徴づける長さが充分大きく、又振幅 ϕ が余り大きくないものとする。この場合、 x 方向にすむ平面波の自己変調、自己収束をあらわす方程式として、次の *Nonlinear Schrödinger Equation* が得ら

れる。

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\lambda'}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{2k_0} \nabla_{\perp}^2 \phi + \gamma |\phi|^2 \phi = 0, \quad (2)$$

ここで, $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, $\lambda, \lambda', \gamma$ は (1) の分散関係で与えられる:

$$\lambda = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0, |\phi|^2=0} \quad \lambda' = \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k=k_0, |\phi|^2=0}$$

$$\gamma = - \left. \frac{\partial \omega}{\partial |\phi|^2} \right|_{k=k_0, |\phi|^2=0}.$$

$k_0 = (k_0, 0, 0)$ は考えている平面波の波数であって, (2) で与えられる複素振幅 ϕ を用いると変調波は

$$\psi = \phi(x, y, z, t) \exp\{ik_0 x - i\omega_0 t\} \quad (3)$$

と書ける。ここで $\omega_0 = \omega(k_0, |\phi|^2=0)$ とした。

方程式 (2) で与えられる系が, 変調や収束に対して安定か否かは, (2) の線形安定性を調べることによって示される。すなわち,

$$\phi = e^{i\gamma A_0^2 t} (A_0 + \varphi) \quad (4)$$

とあき, (4) を (2) に代入して φ について線形化し, さらに

$$\varphi = R_0 \cos(q_{\parallel} x + q_{\perp} y - \Omega t) + i I_0 \sin(q_{\parallel} x + q_{\perp} y - \Omega t)$$

とあくと, 次の分散関係式を得る:

$$\Omega^2 \cong -\gamma A_0^2 (\lambda' q_{\parallel}^2 + (\lambda/k_0) q_{\perp}^2), \quad (5)$$

ここでは, $|q_{\parallel}|, |q_{\perp}|$ が小さいとして, これらについて 4 次の項は無視してある。(5) から Table I にあるような安定条件を得る。(Table I では $\lambda > 0$ としてある)

		$\gamma > 0$	$\gamma < 0$
$\lambda' > 0$		不安定	安定
$\lambda' < 0$	$g_{II}^2 > \left \frac{\lambda}{k_0 \lambda'} \right g_I^2$	安定	不安定
	$g_{II}^2 < \left \frac{\lambda}{k_0 \lambda'} \right g_I^2$	不安定	安定

Table I

不安定性によって成長した波動は、波の非線形効果と分散効果の釣合によって、定常的な波形をもつた波に移行することが予想される。じつさいに、(2)の定常解を求めると、 $\gamma \lambda' > 0$ に対応して、

$$\delta = A e^{i(\gamma A^2/2)t} \operatorname{sech} \{ \sqrt{\gamma/\lambda'} A x \} \quad (6)$$

なる envelope soliton 解が得られ、また、 $\gamma > 0$ に対しては

$$\psi = A e^{i(\gamma A^2/2)t} f(\sqrt{k_0 \gamma / \lambda} A |x|), \quad (7)$$

なる filament 解が求められる。この $\psi = f(r)$ は

$$r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - f + 2f^3 = 0 \quad (8)$$

の $r=0$ で finite, $r=\infty$ で $f=0$ なる解である。定常解 (6), (7) が求まる条件は、それぞれ Table I で $g_{II}=0$, $g_{II}=0$ としたときの不安定性を与える条件と一致していることを注意しておこう。

以下では、(6)と(7)の解が微小振動に対して安定であるか否かを論じられる。その際、変調もしくは収束に対して横方向の微小振動が考えられる。

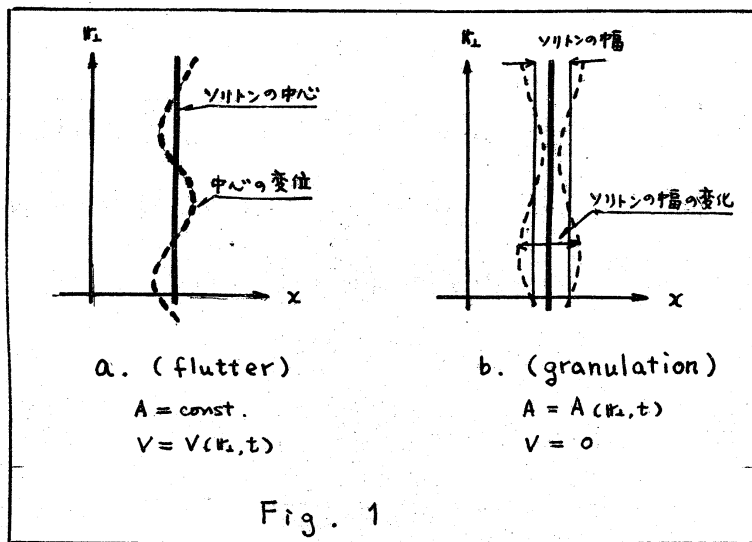
§ 2 Envelope Soliton の安定性

方程式 (2) はガリレイ変換に対して不変であることから、
 (6) の Soliton 解に対応して、

$$\delta_V(x,t) = A \exp\left[i\left\{\frac{\gamma A^2}{2}t - \frac{V^2}{2\lambda}t + \frac{V}{\lambda}x\right\}\right] \operatorname{sech}\left\{\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}A(x-Vt)\right\}, \quad (9)$$

もまた (2) の解であることが判る。(9) は速度 V で x 方向に伝播する振幅 A の Soliton をあらわしている。

(6) に対する擾動として、Fig. 1 a, b に示される二つの型のもの考える。一つは、ソリトンの波形が変化せず、その進む速度が k_1



の進む速度が k_1 に依存して、波面が波打つような擾動である。これを flutter と呼んでおく。いま一つは、ソ

リトンの速度は変化せず、その振幅と波の幅が k_1 によって変化するような granulation に相当するものである。

このような乱れの波数と振動数が、ソリトンの幅 ($= \sqrt{\gamma/\lambda} A$)、振動数 ($= \gamma A^2/2$) にくらべて充分小さければ、擾動を受けた解は (9) からあまりちがわないであろう。それ故、(2) の解を次のようにおいてみよう。

$$\phi(x, r, t) = A \exp\{i\theta + i\epsilon \frac{v}{\lambda} x\} g(A(x - x_0)), \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \gamma A^2/2 - \epsilon^2 v^2/(2\lambda'), \quad (11a)$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = v, \quad (11b)$$

$$A = A_0 + \epsilon a(\tau, \rho), \quad v = v(\tau, \rho), \quad (12)$$

$$\tau = \epsilon^{1/2} t, \quad \rho = \epsilon^{1/2} r, \quad (13)$$

ただし, $\epsilon \ll 1$ 。

(10) ~ (13) を (2) に代入して, $\epsilon^{3/2}$ までとると, 次を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'}{\gamma} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} - g + 2|g|^2 g &= \frac{2}{\gamma A^2} \epsilon^{3/2} \left\{ \frac{1}{\lambda'} \frac{\partial v}{\partial \tau} \xi g + \frac{\epsilon^{1/2} \lambda}{2k_0} \frac{\partial^2 x_0}{\partial \rho^2} A^2 \frac{\partial g}{\partial \xi} \right\} \\ &\quad - i \frac{2\epsilon^{3/2}}{\gamma A^2} \left\{ \frac{\partial a}{\partial \tau} (g + \xi \frac{\partial g}{\partial \xi}) + \frac{\epsilon^{1/2} \lambda}{2k_0} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} A g \right\}, \quad (14) \end{aligned}$$

但, $\xi = A(x - x_0)$ 。(14)で, $\frac{\partial^2 x_0}{\partial \rho^2}$ が ϵ^2 の量であるにも拘らず残されてゐるのは, 後で判るよ様に, x_0 と v の t 依存性の違いによつてゐる。

さて, $g = g_0 + \epsilon^{3/2} g_1$, $g_0 = \text{real}$, $g_1 = R + iI$ とする。 ϵ の lowest order で,

$$\frac{\lambda'}{\gamma} \frac{d^2 g_0}{d\xi^2} - g_0 + 2g_0^3 = 0 \quad (15)$$

を得る。 $\xi \rightarrow \pm \infty$ で g_0 と $\frac{dg_0}{d\xi}$ は 0 とすると, (15) の積分から

$$g_0 = \text{sech}(\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda'}} \xi) \quad (16)$$

というソリトン解が得られる。

次の order になると, R と I の方程式が求められる。

$$\frac{\lambda'}{\gamma} \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} - R + 6g_0^2 R = \frac{2}{\gamma A^2} \left\{ \frac{1}{\lambda'} \frac{\partial v}{\partial \tau} \xi g_0 + \frac{\epsilon^{1/2} \lambda}{2k_0} \frac{\partial^2 x_0}{\partial \rho^2} A^2 \frac{\partial g_0}{\partial \xi} \right\}, \quad (17)$$

$$\frac{\lambda'}{\gamma} \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} - I + 2g_0^2 I = -\frac{2}{\gamma A^2} \left\{ \frac{\partial a}{\partial \tau} (g_0 + \xi \frac{dg_0}{d\xi}) + \frac{\epsilon^{1/2} \lambda}{2k_0} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} A g_0 \right\}. \quad (18)$$

(15)と(17)(18)の比較から容易に求まるように, (17), (18)の
 斉次解のうちで, 充分遠方で0になるものは, それぞれ $\frac{dg_0}{d\xi}$,
 g_0 である。したがって, (17), (18)で与えられる R, I が ξ
 $\rightarrow \infty$ で有界な解を持つ条件として,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg_0}{d\xi} \times [(17)式の右辺] = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_0 \times [(18)式の右辺] = 0,$$

を得る。これらの条件式に(16)を代入し, さらに ξ で微分
 し, (11a) (11b) を用いれば

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{\lambda \gamma A^2}{3k_0} \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} + \frac{\lambda \gamma}{k_0} A^2 \frac{\partial^2 a}{\partial \rho^2} = 0. \quad (20)$$

が得られる。ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_0^2 d\xi = 2\sqrt{\lambda/\gamma}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dg_0}{d\xi}\right)^2 d\xi = \frac{2}{3}\sqrt{\lambda/\lambda'}$$

を用いてみる。 τ と ρ の stretching を変えて $\tau = \epsilon t$, $\rho =$
 $\epsilon \xi$ とすると, R と I の方程式(17), (18)は少々複雑になるが
 R, I の有界な条件(19)(20)は全く同じになることを注意して
 おこう。

(19)と(20)はそれぞれ, flutter と granulation に対するソリ
 トン解の安定条件を与えている。 $\gamma > 0$ ならば, ソリトン
 は flutter に対して安定ではあるが, granulation に対しては不安
 定である。ソリトンが存在するときには, $\gamma \lambda' > 0$ である
 から, これは $\lambda > 0$ (positive dispersion) の場合に相当して

る。 $\lambda < 0$ (negative dispersion) の場合には, これとは正反対に, flutter に対して不安定, granulation に対しては安定となる。

この安定条件は次のような簡単な解釈が可能である。

先づ, (19) に相当する場合を考える。このときには, envelope soliton の波形は変化せず, ソリトンの中心のみが変位している。この変位の x 方向の波数を q とすると, それによる振動数変化は, (2) から判るように,

$$\Omega \approx \frac{\lambda}{2k_0} q^2 \left(-X_0 \frac{\partial g_0}{\partial x} / g_0 \right)$$

で与えられる。 g_0 はソリトンの波形で (16) で与えられている。 $-X_0 \frac{\partial g_0}{\partial x}$ はソリトンの中心が X_0 だけ変位することによる波形の変化をあらわしている。一方, (9) によれば, 中心の位置が時間的に変化すると, 波数が変化し, この波数の変化が振動数変化 Ω をもたらすことになる。波数 (x -方向の) を k とすると

$$\frac{\partial k}{\partial t} = - \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

に注意すると,

$$\frac{\partial k}{\partial t} \approx \frac{\lambda}{2k_0} q^2 X_0 \frac{\partial^2 g_0}{\partial x^2} / g_0$$

を得る。 $\frac{\partial^2 g_0}{\partial x^2} / g_0 \approx -L^{-2}$, L はソリトンの幅, を用いる

と, 最終的に

$$\frac{\partial k}{\partial t} \approx - \frac{\lambda}{2k_0 L^2} q^2 X_0$$

が得られる。したがって、ソリトンの中心が前にすゝみすゝびるところでは、平面波の波数は減らし、おくれるところでは波数が増大する。negative dispersion ($\lambda' < 0$) の場合には、群速度は波数とともに減るので、したがって中心の変位はますます増大し、不安定が生ずる。一方、positive dispersion ($\lambda' > 0$) では、群速度は波数の増減にあわせて増減するので、中心の変位は安定な振動をひきおこすだけである。

granulation に対する安定条件はより理解し易い。 $\gamma < 0$ の場合を考えよう。Schrödinger 方程式との類推から、非線形項は斥力として作用するので、振幅が増したところでは、斥力は大きくなってすくならされる傾向が生ずる。一方、 $\gamma > 0$ では、振幅の大きいところは、引力が大きくなることになって、その部分の振幅はますます増大し不安定となる。この引力による不安定性は、分散効果によって釣合おう傾向が生ずる。しかし、 x 方向の分散効果はすでに、ソリトン波形を保つために使われているので、このバランスは x 方向の分散によって保たれる。したがって、 $\gamma > 0$ の場合には、この種の不安定性の結果、ソリトンは粒状に崩壊してしまう。

かくして、envelope soliton は、分散効果の正負によってその種類は flutter, granulation と異なるものの、横方向の振動に対して安定に存在することはできない。

§ 3 Filament の安定性

§ 2 の議論に対応して、ここでは

$$\phi = A e^{i\theta + i\epsilon(k_0/\lambda)\psi h} h(A(k_1 - \epsilon k_0)) \quad (21)$$

とこの解を想定する。(11) ~ (13)に対応して、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \gamma A^2/2 - \epsilon^2(k_0/2\lambda)\psi^2, \quad (22a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \psi, \quad (22b)$$

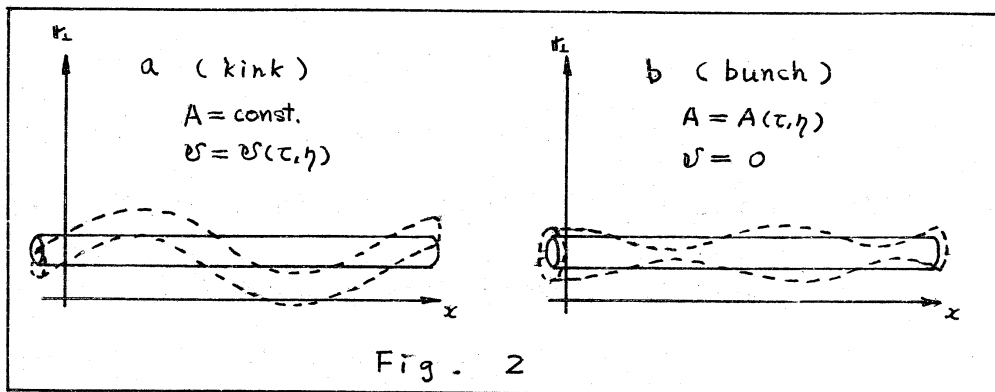
$$A = A_0 + \epsilon a(\tau, \eta), \quad \psi = \psi(\tau, \eta), \quad (23)$$

$$\tau = \epsilon^{1/2} t, \quad \eta = \epsilon^{1/2} x, \quad (24)$$

としておく。ここで考へるのは、filament の kink 型の振動

と bunch 型のモードである。この事情は Fig. 2 a, b に示さ

れてゐる。



(21) ~ (24) を (2) に代入して、 $\epsilon^{3/2}$ の order まで考慮して、

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{\gamma k_0} \frac{\partial^2 h}{\partial \sigma^2} - h + 2|h|^2 h \\ &= \frac{2}{\gamma A^3} \epsilon^{3/2} \left[\frac{k_0}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \sigma h + \frac{\epsilon^{1/2} \lambda'}{2} A^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right] \\ & \quad - i \frac{2\epsilon^{3/2}}{\gamma A^3} \left[\frac{\partial a}{\partial \tau} (h + \sigma \frac{\partial h}{\partial \sigma}) + \frac{\epsilon^{-1/2} \lambda'}{2} A \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right], \quad (25) \end{aligned}$$

を得る。但、 $\sigma = A(k_1 - \epsilon k_0)$ 。

今, $R = R_0 + \epsilon^{3/2} R_1$ (R_0 は real, $|\sigma| = \sigma$ のみの関数) とすると

$$\frac{\lambda}{\gamma k_0} \frac{1}{\sigma} \frac{d}{d\sigma} \left(\sigma \frac{dR_0}{d\sigma} \right) - R_0 + 2R_0^3 = 0, \quad (26)$$

を得る。 $\sqrt{\gamma k_0 / \lambda} \sigma \equiv r$ とすると, (26) は (8) と同じになる。

以下の議論では, R_0 の詳細な形に付らず, filament の安定条件を得ることが出来る。

R_1 に對する方程式は, $\Omega = r/\sigma$ ($\Omega^2 = 1$) で radial unit vector を導入して次のように書く。

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{\gamma k_0} \nabla_\sigma^2 R_1 - R_1 + 4R_0^2 R_1 + 2R_0^2 R_1^* \\ &= (2/\gamma A^3) \left[\frac{k_0}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \Omega \sigma R_0 + \frac{\epsilon^{3/2} \lambda'}{2} A^2 \frac{\partial^2 R_0}{\partial \eta^2} \Omega \frac{\partial h_0}{\partial \sigma} \right] \\ & - (2i/\gamma A^3) \left[\frac{\partial a}{\partial \tau} (R_0 + \sigma \frac{\partial R_0}{\partial \sigma}) + \frac{\epsilon^{3/2} \lambda'}{2} A^2 \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} R_0 \right], \quad (27) \end{aligned}$$

こゝで,

$$R_1 = \Omega R(\sigma; \tau, \eta) + i I(\sigma; \tau, \eta)$$

とすると, (27) に代入すると, R と I の式は

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{\gamma k_0} \left\{ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma \frac{\partial R_\tau}{\partial \sigma} \right) - \frac{1}{\sigma^2} R_\tau \right\} - R_\tau + 6R_0^2 R_\tau \\ &= \frac{2}{\gamma A^3} \left[\frac{k_0}{\lambda} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} \sigma R_0 + \frac{\lambda'}{2} A^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \frac{\partial h_0}{\partial \sigma} \right], \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{\gamma k_0} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma \frac{\partial I_\tau}{\partial \sigma} \right) - I_\tau + 2R_0^2 I_\tau \\ &= -\frac{2}{\gamma A^3} \left[\frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} (R_0 + \sigma \frac{\partial R_0}{\partial \sigma}) + \frac{\lambda'}{2} \gamma A^2 \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} R_0 \right], \quad (29) \end{aligned}$$

となる。こゝで, 添字の τ は τ に對する偏微分をあらわす。

また, (28) を導くとき

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} (\Omega \cdot W(\sigma)) = \Delta \Omega \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma \frac{\partial W}{\partial \sigma} \right) - \frac{1}{\sigma^2} W \right]$$

という関係式を用いてゐる。

充分遠方で R_t が有界であるためには、

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial h_0}{\partial \sigma} \times [(28) \text{ の右辺}] \sigma d\sigma = 0$$

が満たされなければならぬ。(26)を用いれば、この条件は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - c \frac{\gamma \lambda'}{2} A^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \psi = 0 \quad (30)$$

となる。 c は、 $c = \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial h_0(x)}{\partial x}\right)^2 x dx / \int_0^{\infty} (h_0(x))^2 x dx$ で与えられる
 数係数である。 c は正であるので、 $\lambda' > 0$ ならば安定な
 振動が存在する。 $\lambda' < 0$ ならば、 filament は kink 型の不
 安定性を生ずる。この事情は、 § 2 で論じた envelope soliton
 の flutter と同じである。

I が有界な solution を持つ条件は、

$$\int_0^{\infty} h_0 \times [(29) \text{ の右辺}] \sigma d\sigma = 0$$

となる。

$$\int_0^{\infty} h_0 \left(h_0 + \sigma \frac{dh_0}{d\sigma} \right) \sigma d\sigma = 0$$

に注意すると、この条件は

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} = 0$$

となる。これは、 envelope soliton の場合の granulation に対する
 安定条件とは全く異なっている。この事情は次のように解釈
 される： (2) 式を積分すれば

$$\int_0^{\infty} |R(r)|^2 r dr = \text{independent of } t$$

を得る。したがって、もし filament がその形をかえずその

半径が時間的に変化したとすると、その filament の振幅は半径と逆比例の関係を保ちながら変化することになる。一方、分散項は2階の微分係数からなるので半径の自乗に逆比例しており、また非線形項は振幅の自乗、すなわち半径の自乗に逆比例している。それ故、(21) の如く変形する filament にあつては、分散項と非線形項は常にバランスし得ることになる。そこで、半径や振幅が局所的に変化しても、 x 方向でバランスしあつて filament に沿つた運動をひきおこさない。その結果 (31) を得る。(一次元ソリトンでは、 $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = \text{independent of time}$ であるので、振幅は幅の平方根に逆比例して、分散項 $\propto (\text{幅})^2$ 、非線形項 $\propto (\text{幅})^{-1}$ となる。それ故、幅がせまくなると分散項が大きくなつておし戻され、幅が大きくなると引力としての非線形項が作用することになつて、丁度 optimal な幅のところのみ両者のバランスが可能となる) したがつて、何らかの原因で半径が変化し始めると、各時刻で非線形項と分散項がバランスするので、それに対する復元力は働かず、際限なくその運動がつづく。その意味で filament は安定ではない。

§4 まとめ

これまで、よく知られているように、Envelope Soliton は一

次元的な擾動に対してはきわめて安定である。しかし、二次元的な擾動に対しては、こゝで示されたように、安定ではあり得ない。

filament は、 $\lambda' < 0$ であれば、kink 型の不安定性を保持している。さらに、此のオーガ-の範囲内では、その半径の変化が何らかの原因で生じるとその運動は限りなく続くので、その意味で filament は安定ではない。

(上の参考文献としては、B.B. Kadomtsev & V.I. Karpman ;
Sov. Phys. Uspekhi 14 (1971) 40 , に詳しい。)