

液柱上の非線型表面張力波

阪大基礎工

菅 恒夫

井上良紀

角谷典彦

液柱表面上に立つ表面張力波の問題は、液柱の不安定性に関連して、前世紀来多くの流体力学者によって取り上げられて来た古典的な問題の一つである。

Plateau の先駆的研究に始まるこの問題は、19 世紀の終りに Lord Rayleigh によって、線型理論の枠内では、ほぼ完全に解決された。彼は、液柱が軸対称以外の無限小擾乱に対しては常に安定であり、軸対称擾乱に対しては液柱半径で無次元化した波数が 1 より小さいとき不安定になること、を示した。彼はまた、最大増幅率を与える波数が 0.697 であることを見出し、液柱が崩壊してできる液滴の大きさを推定した。この推論によれば液滴の大きさは擾乱の振幅にはよらないことになるが、実験事実は必ずしもこれを支持してはいない。

Lord Rayleigh の線型理論は、約半世紀後の 1931 年に

、Weberによってより一般の場合に拡張された。Weberは液体の粘性と、液柱まわりの空気の影響を考慮した解析を行ない、粘性の影響はcut-off波数($k_c = 1$)の値を変えないこと、まわりの空気の影響は液柱の速度が小さいときにはほとんど無視できること、を示した。約1世紀にわたる線型理論の堆積はLord Rayleighの名著 *Theory of Sound* (1945) および Chandrasekharの名著 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (1961) に詳しくまとめられている。

今から約6年前の1968年に、YuenとWangが初めて有限振幅の影響を考慮して、この問題に再検討を加えた。Yuenは、Lord Rayleighの解析を拡張して、非線型の波においても線型波の軸方向の周期性が保たれるような初期擾乱を仮定し、座標歪曲の方法を用いて、安定と不安定とをわけ、cut-off波数の振幅依存性を評価し $k_c > 1$ でも不安定が生じ得ることを示した。一方Wangは一定振幅で定常的に伝播する波を考え、その伝播速度の振幅依存性を評価した。その後 Nayfeh (1970) は、多時間展開の方法を用いて Yuen の非線型 cut-off 波数を改良し、また Nayfeh と Hassan (1971) は進行波に対する周期性の制限をゆるめて非線型性にもとづく波数(または振動数)のズレを評価した。しかし、彼等はその解析に不必要な制限を加えたため長時間にわたる振幅変

調の問題を完全に解決することができなかった。

ここでは, *Nayfeh* と *Hassan* (1971) の解析を改良し, 進行波の長時間振幅変調を調べると共に, 同様な解析を *cut-off* 波数近くの定在波に適用することにより非線型の *cut-off* 波数を求めることを目的とする。まず, *multiple scale* の方法で問題を定式化する。これは *Yuen* の座標歪曲法, *Nayfeh-Hassan* の多時間展開法を一般化したものに相当する。

$\epsilon > 1$ の準単色平面進行波の複素振幅がいわゆる非線型の *Schrödinger* 方程式で記述できることがわかる。この方程式は近年各方面の諸分野(非線型光学, プラズマ波, 水面重力波, 格子波, その他)で話題となっている方程式で, その興味ある性質が相ついで明らかにされつつある。そのよく知られた性質から, 一定振幅の波列(先述の *Wang* の解はこの部類に属する)が, $\epsilon > 1.28$ をみたすような波数に対して変調不安定をおこすことがわかる。このことは, 擾乱の振幅に依存した液柱の液滴への崩壊の新しい可能性を示唆している。同様の解析を $\epsilon \approx 1$ 付近の定在波に適用することにより, 準単色平面定在波が別のタイプの非線型 *Schrödinger* 方程式によって支配されることがわかる。この方程式は通常非線型 *Schrödinger* 方程式の時間座標と空間座標とを入れかえた

形をしており, Watanabe (1969) がプラズマ中の *two-stream instability* に関連して求めた式と同じタイプをしている。この方程式の定振幅波列解の安定条件から非線型の場合の *cut-off* 波数を評価することができる。これは Nayfeh (1970) の改良値を特殊な場合として含むことが示される。

なお本研究の詳細は *Journal of the Physical Society of Japan* に投稿中である。