数理解析研究所講究録
第 218 巻 1974 年 219-227

非一様媒質中におけるソリトンの分裂

大阪高専　小野廣明

§1. 序論

孤立波や非線型波列などの現実の浅水波はKorteweg-de Vries(K-dV)方程式により正確に記述できることがZabuskyおよびGalvinの実験[1)]により明らかにされ、最近はK-dV方程式に関連した波浪の理論的研究や実験が海洋工学など応用分野で盛んに行われている。[2,3)]

ここでは応用面からもまた純理論的にみても重要と思われる媒質の非一様性の分散性波動に対する影響を考える。底が空間的にゆっくり変化している場合、浅水波は、非分散性媒質に対してTaniutiおよびAsano[5)]が用いたGardner-Morikawaタイプの座標の伸縮変換を利用して、つぎのような変形K-dV方程式に支配されることがKakutani[6)]により示された:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\alpha(\xi)h\frac{\partial h}{\partial x}+\beta(\xi)\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}+\gamma(\xi)h=0. \qquad (1.1)$$

この種の方程式は、非一様な密度分布をもつプラズマ中の波動など、かなり広範囲な非一様媒質中の波動をも支配していることがわかっている。[4] 方程式(1.1)は独立変数と従属変数の適当な変換により形式上、非一様性の影響を一項にまとめることができる:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\nu(t)u=0. \qquad (1.2)$$

ここで、x, t はそれぞれ空間的, 時間的な'役割'をもつ独立変数ではあるが、必ずしも時間、空間座標そのものではない。

$\nu(t)$ は媒質の非一様性を表わしていて媒質が一様なところでは値は0で、このとき方程式(1.2)はK-dV方程式となる。

K-dV方程式には、よく知られているように定常解として soliton 解や cnoidal wave 解がある。方程式(1.2)を用いて底の凸凹などの媒質の非一様性による soliton の成長や減衰あるいは分裂などが記述できることがわかっている。[7]

本論文では方程式(1.2)を基礎にして、soliton とならび重要と思われる cnoidal wave などの波列に対する非一様性の影響を調べる。まず(§2)、波列の非一様性によるゆっくりした変調を記述する方程式を導き、それを用いて一様媒質中では線型変調に対して安定であった弱い cnoidal wave[8] が非一様媒質中では不安定となりうることを示す(§3)。ついで(§4)、

Asano-Taniuti-Yajima[19]により見い出された、K-dV方程式の近似的な定常解である振幅の包絡線に関して圧縮性のsoliton(ここでは、これをよく知られているE-solitonと区別するため、negative E-solitonと呼ぶ)*に対する非一様の影響を調べ前出の古典的なsoliton同様に分裂しうることを示す。

§2. 変形された非線型Schrödinger方程式

序論で述べたように底に凹凸のある浅水波など種々の非一様媒質中における非線型波動は方程式(1.2)の型の方程式で記述されるので以下では媒質を特定せず一般に方程式(1.2)で支配される物理系を考えることにする。(媒質に対する$\nu(t)$の具体形については文献7,9)を参照されたい。)

'弱い'非線型性をもつ波列の'弱い'非一様性による'ゆっくりした'変調を考えることにし、つぎのような独立変数の伸縮変換、従属変数の摂動展開そして$\nu(t)$の形についての仮定をする;

$$\xi=\varepsilon(x-\lambda_0 t)\ ,\quad \tau=\varepsilon^2 t\ ,\quad \lambda_0=\frac{\partial\omega_0}{\partial k_0} \qquad (2.1)$$

ただしω_0, k_0は注目する波列の、媒質が一様な場合の線形近似における振動数, 波数である。εは小さなパラメータ。

* この解に著者の注意を向けて下さった阪大の角谷典彦先生に感謝致します。

$$
\left.
\begin{aligned}
&u=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \varepsilon^{n}\, u^{(n,m)}(\xi,\tau)\, e^{im(k_0x-\omega_0 t)}, \\
&u^{(n,-m)} = u^{(n,m)*},
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.2}
$$

ただし$*$は複素共役。

$\nu(t)$は知られている例ではすべて$\dfrac{d\tilde{\nu}(t)}{dt}$の形をしているのでつぎの形を仮定する:

$$
\nu(t)=\varepsilon^{2}\nu(\tau)=\varepsilon^{2}\frac{d\tilde{\nu}(\tau)}{d\tau}. \tag{2.3}
$$

式(2.1)〜(2.3)を方程式に代入して、同じ調和成分、同じεのべきの係数を等しいとおき、各(n,m)の組について、つぎの式を得る:

$$
\begin{aligned}
&-\lambda_0 u_{\xi}^{(n-1,m)} + u_{\tau}^{(n-2,m)} - i m\omega_0 u^{(n,m)} + u_{\xi\xi\xi}^{(n-3,m)} + \\
&+3imk_0 u_{\xi\xi}^{(n-2,m)} - 3m^2k_0^2 u_{\xi}^{(n-1,m)} - im^3k_0^3 u^{(n,m)} + \\
&+\sum_{\substack{n'+n''=n-1\\ m'+m''=m}} u^{(n',m')} u_{\xi}^{(n'',m'')} + ik_0 \sum_{\substack{n'+n''=n\\ m'+m''=m}} m'' u^{(n',m')} u^{(n'',m'')} + \\
&+\nu(\tau) u^{(n-2,m)} = 0,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

ただし$u^{(l,m)}$はlが負のとき0とする。

(2.4)式を順次解いて$u^{(1,1)}$に対する変形された非線型Schrödinger方程式を得る:

$$
\begin{aligned}
&i\frac{\partial u^{(1,1)}}{\partial \tau} - 3k_0\frac{\partial^2 u^{(1,1)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{6k_0}|u^{(1,1)}|^2 u^{(1,1)} + i\nu(\tau)u^{(1,1)} \\
&=0.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

この方程式は媒質が一様なところでは最后の項が落ちて既に知られている非線型Schrödinger方程式に帰着する。ところで、非線型Schrödinger方程式は、つぎのような特解をもつことが知られている。

(1) 弱いcnoidal wave解

$$\left.\begin{aligned} u^{(1,1)} &= a_0 e^{i\alpha_0\tau}, \\ \alpha_0 &= \frac{1}{6k_0}a_0^2, \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

ただし、a_0, α_0は実定数。

式(2.6)を代入した式(2.2)はK-dV方程式のcnoidal wave解に対応していることがわかっている。

(2) negative E-soliton解

$$u^{(1,1)} = \sqrt{A_0^2 - u_0^2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{u_0^2}{36k_0^2}}\left(\xi - \sqrt{A_0^2-u_0^2}\,\tau\right)} \times$$

$$\times \exp\left[\frac{-i}{6k_0}\sqrt{A_0^2-u_0^2}\int^{\xi} d\xi \left\{1 - \frac{A_0^2}{A_0^2 - u_0^2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{u_0^2}{36k_0^2}}\left(\xi - \sqrt{A_0^2-u_0^2}\,\tau\right)}\right\}\right],$$

ただし、A_0, u_0は実定数で$A_0^2 \geq u_0^2$。 (2.7)

続く2つの節では、媒質の非一様性の影響を、一様媒質における代表的な波列(1), (2)についてみる。

§3. 弱いcnoidal waveの変調

$\nu(\tau)$の存在は、一様媒質中では一定であった式(2.6)の振幅a_0と位相α_0を変化させると考えられるから$a(\tau),\alpha(\tau)$をτの実関数として、

$$u^{(1,1)}=a(\tau)e^{i\int_{\tau_0}^{\tau}\alpha(\tau)d\tau} \tag{3.1}$$

と仮定して、方程式(2.5)に代入する。ただしτ_0は適当な境界点とする。このとき、

$$\frac{da(\tau)}{d\tau}=-\nu(\tau)a(\tau)\ ,\quad \alpha(\tau)=\frac{1}{6k_0}a^2(\tau)\ , \tag{3.2}$$

を得る。この式を解いて、

$$\left.\begin{aligned} a(\tau)&=a(\tau_0)e^{-\int_{\tau_0}^{\tau}\nu(\tau)d\tau}\ ,\\ \alpha(\tau)&=a^2(\tau_0)e^{-2\int_{\tau_0}^{\tau}\nu(\tau)d\tau}\ . \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

したがって$\nu(\tau)<0$ならば、そこで弱いcnoidal waveは大きく振幅、位相を変える。一様媒質中では線型変調に対して安定であった弱いcnoidal waveは、この意味で非一様媒質中において不安定となりうることが示された。

§4. negative E-solitonの分裂

方程式(2.5)を厳密に解くことは難しいので一様媒質に対

するAsano-Taniuti-Yajimaの方法[19]に従って近似的に解くことにする。そのために、つぎの式で定義される実関数$A(\xi,\tau)$ $\Omega(\xi,\tau)$：

$$u^{(1,1)} = A \exp\left(-i\int^{\xi}\frac{\Omega}{3k_0}d\xi\right), \tag{4.1}$$

を用いて方程式(2.5)を書きかえると：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial A^2}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\xi}(A^2\Omega)+2\nu(\tau)A^2=0,\\&\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}+\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}+\frac{\partial A^2}{\partial\xi}-18k_0^2\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}\right)=0,\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

を得る。 この連立方程式系はAsanoおよびOnoにより論ぜられた方程式系[4]に属するので弱い非線型性、分散性そして非一様性の仮定のもとに方程式(1.1)の形に帰着させることができる。

すなわち、伸縮座標変換：

$$\left.\begin{aligned}&X=\delta^{\frac{1}{2}}\left(\xi-\int^{\tau}A_0(\tau)d\tau\right),\\&\tau=\delta^{\frac{3}{2}}\tau,\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

と摂動展開：

$$\left.\begin{aligned}&A=A_0+\delta A_1+\delta^2A_2+\cdots\cdots,\\&\Omega=\delta\Omega_1+\delta^2\Omega_2+\cdots\cdots,\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

により

$$\frac{\partial A_1}{\partial \tau}+3A_1\frac{\partial A_1}{\partial X}-\frac{9k_0^2}{2A_0^3}\frac{\partial^3 A_1}{\partial X^3}+\frac{1}{2}\nu(\tau)A_1=0, \qquad (4.5)$$

を得る。ただし、以上において δ は小さなパラメータであり、$\nu(t)$ に対しては式(2.3)と同じ理由から $\nu(t)=\delta^{\frac{3}{2}}\nu(\tau)$ と仮定した。また 0オーダの式より A_0 は $\nu(\tau)$ からつぎのようにきまる： $A(\tau)=\exp\{-\int\nu(\tau)d\tau\}$.

方程式(4.5)はさらにつぎのように書きかえられる：

$$\frac{\partial U}{\partial T}+U\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial^3 U}{\partial X^3}+\nu(T)U=0, \qquad (4.6)$$

ただし、

$$\left.\begin{aligned} T&=-\frac{9k_0^3}{2}\int\frac{d\tau}{A_0^3(\tau)}, \\ U&=-6A_0^3A_1. \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

方程式(4.6)は正に方程式(1.2)の形をしており、媒質が一様である場合、soliton 解をもつ、この解は、式(4.7)に注意すれば、negative E-soliton (2.7)の近似解となっていることは容易に示される。かくして negative E-soliton の非一様媒質中での振舞いは、古典的な soliton と同じ方程式(1.2)あるいは(4.6)により記述されることがわかる。したがって negative E-soliton も古典的な soliton 同様、非一

媒質中において成長、減衰、あるいは分裂などの興味ある振舞いを示すことが期待される。

引用文献

1) N.J. Zabusky and C.J. Galvin : J. Fluid Mech. 47 811 (1971).

2) 土屋義人, 安田孝志 : 第20回海岸工学講演会論文集 397 (1973).

3) N. Shuto : Coastal Engineering in Japan 16 (1974).

4) N. Asano and H. Ono : J. Phys. Soc. Japan 31 1830 (1971).

5) N. Asano and T. Taniuti : J. Phys. Soc. Japan 27 1059 (1969).

6) T. Kakutani : J. Phys. Soc. Japan 30 272 (1971).

7) H. Ono : J. Phys. Soc. Japan 32 332 (1972).

8) H. Hasimoto and H. Ono : J. Phys. Soc. Japan 33 805 (1972).

9) H. Ono : to be published in Memoirs of Osaka Tech. College (1974).

10) N. Asano, T. Taniuti and N. Yajima : J. Math. Phys. 10 2020 (1969).