数理解析研究所講究録
第 221 巻 1974 年 17-27

Foliated principal GL_r-bundles の特性類

北大　理学部　　鈴木　治夫

1.　Mをparacompact Hausdorff 微分可能なn次元多様体とし，$\mathfrak{F}$をMの上の微分可能なcodimension qのfoliationとする。Mに Lie 群が作用し，orbitsの次元が同一$(n-q)$ならば，Mのcodimension qのfoliationが定まる。この意味で，foliationは変換群の理論と関連をもつ。Foliation $\mathfrak{F}$をもつ多様体Mを$(M, \mathfrak{F})$と表わすことにする。$(M, \mathfrak{F})$上の<u>foliated principal</u> GL_r-<u>bundle</u> $E(M, p, GL_r)$は，微分可能principal GL_r-bundle $p: E \to M$で，Eはright GL_r-invariantな微分可能foliation $\mathfrak{F}_E$をもち，その各leafは$\mathfrak{F}$のleafのpに関する被覆となるものとする。$\mathfrak{F}_E$を$\mathfrak{F}$の<u>lifted foliation</u>という。本論の目的は，$(M, \mathfrak{F})$上のfoliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$のBott特性類の構成と，$E(M, p, GL_r)$がtransversal projectable connectionをもつとき，そのvanishing theoremを得ることである。P. Molino [3]はfoliationのnormal bundleのframe bundleがtransversal projectable connectionをもつ場合を扱っ

ているが，Mがcodimensions q，rのfoliations $\mathcal{F}$，$\mathcal{F}'$をもち，$\mathcal{F}$のtangent bundle Fが$\mathcal{F}'$のtangent bundle F'のsubbundleになっている場合には，$(M, \mathcal{F})$の上のfoliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$が構成され，これにBott特性類のvanishingの議論が適用される。

2．$(M, \mathcal{F})$の上の$E(M, p, GL_r)$の接続は，$\mathcal{F}_E$のleafがその接続に関して*horizontal*であれば<u>*transversal*</u>といわれる。gl_rをGL_rのLie algebra，$I(gl_r)$をgl_rのinvariant polynomialsのalgebraとする。また∇'を$E(M, p, GL_r)$のtransversal connectionとする。$E(M, p, GL_r)$がtransversal connectionをもつことは，容易にみられる。

補題2.1．k'を∇'のM上の曲率形式とし，$\varphi_i \in I(gl_r)$，$\deg \varphi_i = i$とするとき，$i > q$に対して，$\varphi_i(k') = 0$となる。

証明　$k'^{\alpha} = (k'^{\alpha}_{ij})$を$E(M, p, GL_r)$の座標近傍$U_\alpha$の上の$k'$の表示とする。$k'$は$\mathcal{F}$のleavesに沿って0だから，$I_\alpha(F)$を$F|U_\alpha$の定義イデアルとするとき，$k'^{\alpha}_{ij} \in I_\alpha(F)$となる。ゆえに$i > q$に対して，$\varphi_i(k'^{\alpha}) \in I_\alpha(F)^{q+1} = \{0\}$となる。証明終

$\mathcal{F}$のleafをLで表わす。Rを実数直線とするとき，$\mathcal{F} \times R = \{L \times R \mid L \in \mathcal{F}\}$は$M \times R$の上のcodimension qの微分可能foliationとなる。写像$p \times id : E \times R \to M \times R$は$(M \times R, \mathcal{F} \times R)$

の上の foliated principal GL_r-bundle $E(M\times R,\ p\times id,\ GL_r)$を定める。その lifted foliation は$(\mathcal{F}\times R)_E=\mathcal{F}_E\times R$である。 ∇, $\bar{\nabla}$を$E(M,p,GL_r)$の接続で, θ, $\bar{\theta}$をその接続形式とする。

$E(M\times R,\ p\times id,\ GL_r)$の上の gl_r-valued 1-form $\tilde{\theta}$を,

$$\tilde{\theta}(\partial/\partial t)=0 \qquad (t \text{ は } R \text{ の座標}),$$

$$\tilde{\theta}(X)=(1-t)\theta(X)+t\bar{\theta}(X) \qquad X\in T_{(e,t)}(E\times\{t\})=T_e(E)\times\{t\},$$

によって定める。 $\tilde{\theta}$は$E(M\times R,\ p\times id,\ GL_r)$の上の horizontal space field を定めるから, その上の接続$\tilde{\nabla}$を定める。 これを$\tilde{\nabla}=(1-t)\nabla+t\bar{\nabla}$とかく。

一般に, 微分可能な principal bundle の接続の曲率形式$\mathcal{R}$は閉形式だから, 任意の$\varphi_i\in I(gl_r)$に対して $d(\varphi_i(\mathcal{R}))=0$となる。$\bar{\nabla}$のM上の曲率形式を$\bar{\mathcal{R}}$とかくとき, de Rham cohomology の微分可能ホモトピー不変性によって,

$$[\varphi_i(\mathcal{R})]=[\varphi_i(\bar{\mathcal{R}})]\in H^{2i}_{DR}(M)$$

となる。 $[\varphi_i(\mathcal{R})]$はφ_iに対する<u>Pontrjagin特性類</u>と呼ばれるものである。

補題2.1から, 次の Bott vanishing theorem の一般化が得られる。

系 2.2. (P. Molino [2]) $(M,\mathcal{F})$の上の$E(M,p,GL_r)$の Pontrjagin特性類は, $2\cdot\mathrm{codim}.\mathcal{F}$より大きい次元に対して 0 となる。

次に foliation の特性類を構成するための準備の補題を述べておく。

補題 2. 3. ∇^1, $\bar{\nabla}^1$を, $(M, \mathfrak{F}_1)$ の上の $E(M, p, GL_r)$ の transversal connections とするとき, $\tilde{\nabla}^1 = (1-t)\nabla^1 + t\bar{\nabla}^1$ は, $(M \times R, \mathfrak{F}_1 \times R)$ の上の $E(M \times R, p \times id, GL_r)$ の transversal connection となる。

証明は, 接続 $\tilde{\nabla}^1$ の定義から容易に得られる。

補題 2. 4. 実数上の $r \times r$ 行列 A に対して, *invariant homogeneous polynomials* c_i を

$$\det(I + tA) = 1 + \sum_{i=1}^{r} t^i c_i(A)$$

によって定義すれば,

$$I(gl_r) = R[c_1, c_2, \cdots, c_r]$$

となる。

証明は R. Bott [1, Appendix A] 参照.

∇^0 を principal bundle $E(M, p, GL_r)$ 上のリーマン接続とし, K^0 を ∇^0 の M 上の曲率形式とする。 $A_C^*(M)$ を M 上の複素数係数の微分形式の algebra とし, 準同形 $\lambda(\nabla^0)$, $\lambda(\nabla^0, \nabla^1)$: $I(gl_r) \to A_C^*(M)$ を,

$$\lambda(\nabla^i)(\varphi_j) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^j \varphi_j(K^i) \qquad i = 0, 1,$$

$$\lambda(\nabla^0, \nabla^1)(\varphi_j) = \hat{p}_*(\lambda(\nabla^{0,1})(\varphi_j) \mid M \times I),$$

$\hat{p}_*$: $A_C^*(M \times I) \to A_C^*(M)$ は trivial bundle $\hat{p}$:

$M\times I \to M$ に関する integration along the fibre,

$$\nabla^{0,1}=(1-t)\nabla^0+t\nabla^1 \qquad (t\in R)$$

と定義する。　R. Bott [1] と同じ計算方法によって，

$$\lambda(\nabla^0)(c_{2i-1})=0 \qquad 1\leqq 2i-1\leqq r,$$

$$d\{\lambda(\nabla^0,\nabla^1)(c_{2i-1})\}=\lambda(\nabla^1)(c_{2i-1})$$

が得られる。　他方，補題2.1によって，$\lambda(\nabla^1)$：$R[c_1,\cdots,c_r]\to A_C^*(M)$ は，q より大きい次数の元を 0 に写すから，differential algebra $WO_{q,r}$ を，

$$R[c_1,\cdots,c_s]/(\deg>q)\otimes\Lambda(h_1,h_3,\cdots,h_l)$$

$$s=\min(q,r),\quad l=\max\{2m+1\leqq r\},$$

$$d(c_i)=0,\quad d(h_i)=c_i \qquad 1\leqq i\leqq s,$$

$$d(h_i)=0 \qquad i>s$$

によって定めるとき，R-algebra homomorphism λ_E：$WO_{q,r}\to A_C^*(M)$ が，

$$\lambda_E(c_i)=\lambda(\nabla^1)(c_i) \qquad 1\leqq i\leqq s,$$

$$\lambda_E(h_i)=\lambda(\nabla^0,\nabla^1)(c_i) \qquad i=1,3,\cdots,l$$

によって定義される。　上に述べた $\lambda(\nabla^0,\nabla^1)$ の性質から，λ_E は cochain map で，R-algebra homomorphism λ_E^*：$H^*(WO_{q,r})\to H_{DR}^*(M;C)$ を引きおこす。

命題2．5．　λ_E^* は，$(M,\mathcal{F})$ 上の foliated principal GL_r-bundle $E(M,p,GL_r)$ によって定まり，∇^0，∇^1 のとり方によらない。

証明　∇^1, $\bar{\nabla}^1$を$(M, \mathcal{F})$上の$E(M, p, GL_r)$のtransversal connectionsとするとき，補題2. 3によって，$\tilde{\nabla}^1 = (1-t)\nabla^1 + t\bar{\nabla}^1$ $(t \in R)$もまた$(M \times R, \mathcal{F} \times R)$の上のfoliated principal GL_r- bundle $E(M \times R, p \times id, GL_r)$のtransversal connectionとなる。　他方二つのリーマン接続は，リーマン接続を通して微分可能ホモトープとなる。　ゆえに，de Rham cohomologyの微分可能ホモトピー不変性により結論が得られる。　証明終

$Im(\lambda_E^*)$の元を，$(M, \mathcal{F})$の上の$E(M, p, GL_r)$の<u>Bottの特性類</u>と呼ぶことにする。

3.　$(M, \mathcal{F})$上のfoliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$のtransversal connectionは，局所的に$\mathcal{F}$にtransversalなMのsubmanifold上の，$E(M, p, GL_r)$のrestrictionの接続の，$\mathcal{F}$のleavesに沿って定まるMのlocal projectionに関する逆像となるとき，<u>projectable</u>と呼ばれる。　∇^ωを$(M, \mathcal{F})$の上のfoliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$のtransversal projectable connection (C. T. P.) とする。　前節のBottの特性類の構成において，∇^1として∇^ωを用いるとき，∇^ωは局所的にq次元多様体上の接続から引きおこされた接続であるから，$\lambda(\nabla^\omega)$: $R[c_1, \cdots, c_r] \to A_c^*(M)$は，次数が$[q/2]$より大きい元をすべて0に写す。　したがって，differential algebra $WO'_{\frac{q}{2}, r}$を，

$$R[c_1,\cdots,c_{s'}]/(\deg>\tfrac{q}{2})\otimes\Lambda(h_1,h_3,\cdots,h_l)$$

$$s'=\min([q/2],r),\quad l=\max\{2m+1\leqq r\}$$

$$d(c_i)=0,\quad d(h_i)=c_i\qquad 1\leqq i\leqq s'$$

$$d(h_i)=0\qquad i>s'$$

によって定めるとき，R-algebra homomorphism λ_E : $WO'_{\frac{q}{2},r}\to A^*_C(M)$ が，

$$\lambda'_E(c_i)=\lambda(\nabla^1)(c_i)\qquad 1\leqq i\leqq s'$$

$$\lambda'_E(h_i)=\lambda(\nabla^0,\nabla^1)(c_i)\qquad i=1,\ 3,\cdots,\ l$$

によって定義され，R-algebra homomorphism $(\lambda'_E)^*$: $H^*(WO'_{\frac{q}{2},r})\to H^*_{DR}(M;C)$ を引きおこす。

$WO'_{\frac{q}{2},r}$ の cocycles は，

$$c_{i_1}\cdots c_{i_\lambda}\otimes 1,$$

$$c_{i_1}\cdots c_{i_\lambda}\otimes h_{j_1}\wedge\cdots\wedge h_{j_\mu}\quad 2\Big(\sum_{\alpha=1}^{\lambda}i_\alpha+\min\{j_\beta\mid 1\leqq\beta\leqq\mu\}\Big)>q,$$

の1次結合であることに注意しておく。

命題3．1． Cohomology class

$$(\lambda'_E)^*[c_{i_1}\cdots c_{i_\lambda}\otimes h_{j_1}\wedge\cdots\wedge h_{j_\mu}]$$

は，$2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda}i_\alpha+\min\{j_\beta\mid 1\leqq\beta\leqq\mu\})\neq q+1$ ならば，∇^ω, ∇^0 のとり方によらない。 とくに q が偶数ならば，$(\lambda'_E)^*$ は ∇^ω, ∇^0 のとり方によらない。

証明 ∇^ω, $\bar{\nabla}^\omega$ を $(M,\mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E(M,p,GL_r)$ の transversal projectable connections で，$\mathcal{F}$ に関する

transversal submanifolds N, $\bar{N}$ の上の，$E(M, p, GL_r)$ の restrictions の接続の，$\mathcal{F}$ の leaves に沿って定まる M の local projections による逆像になっているとする。 N，$\bar{N}$ の間に，明らかに，自然な局所微分位相同形があり，∇^ω，$\bar{\nabla}^\omega$ は $E(M, p, GL_r)$ の，$\mathcal{F}$ に関する同一 transversal submanifold N の上における restriction の接続の，$\mathcal{F}$ の leaves に沿って定まる M の local projection による逆像としてよい。 接続 $\tilde{\nabla}^\omega = (1-t)\nabla^\omega + t\bar{\nabla}^\omega$ $(t \in R)$ は，$(M \times R, \mathcal{F} \times R)$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E(M \times R, p \times id, GL_r)$ の上の，transversal connection であり，また，$E(M \times R, p \times id, GL_r)$ の，$M \times R$ の codimension $q+1$ の foliation $\{\mathcal{F} \times \{t\}\}$ 上の foliated principal GL_r-bundle の構造に対して，$\tilde{\nabla}^\omega$ は transversal projectable connection となる。 したがって，$\tilde{\nabla}^\omega$ を用いて定められる cochain map λ'_E : $WO'_{\frac{q}{2}, r} \to A_c^*(M)$ に対して，$2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + \min\{j_\beta \mid 1 \leq \beta \leq \mu\}) > q+1$ ならば，

$$d(\lambda'_E(c_{i_1} \cdots c_{i_\lambda} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_\mu})) = 0$$

となる。 他方二つのリーマン接続は，リーマン接続を通して互に微分可能ホモトープとなる。 ゆえに de Rham cohomology の微分可能ホモトピー不変性によって結論が得られる。 証明終

定理 3．2． $(M, \mathcal{F})$ 上の foliated principal GL_r-bundle

$E(M, p, GL_r)$ が transversal projectable connection ∇^{ω} をもつとする。　τ : $WO_{q,r} \to WO'_{\frac{q}{2},r}$ を natural projection による cochain map とし，その induced cohomology homomorphism を τ^* とかくとき，

$$\begin{array}{ccc} H^*(WO_{q,r}) & & \\ \downarrow \tau^* & \searrow^{\lambda_E^*} & \\ H^*(WO'_{\frac{q}{2},r}) & \xrightarrow{(\lambda'_E)^*} & H^*_{DR}(M; C) \end{array}$$

は可換となる。

証明　$z \in WO_{q,r}$ で $dz = 0$ ならば，$d\tau z = \tau dz = 0$.
λ_E^{ω} : $WO_{q,r} \to A_C^*(M)$ を ∇^{ω} , ∇^0 によって定められる cochain map とするとき，$\lambda'_E(\tau z) = \lambda_E^{\omega}(z)$ となる。　他方，∇^{ω} は transversal connection だから，$[\lambda_E^{\omega}(z)] = \lambda_E^*[z]$ 。

証明終

$Im(\lambda'_E)^*$ の元を $(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$ の，transversal projectable connection に関する Molinoの特性類と呼ぶことにする。

定理3.2によって，$(M, \mathcal{F})$ 上の $E(M, p, GL_r)$ が transversal projectable connectionをもつとき，いくつかの Bottの特性類は 0となる。

系　3.3.　定理3.2の条件の下で，

$$\gamma = c_{i_1} \cdots c_{i_\lambda} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_\mu}$$

$$1 \leqq i_1, \cdots, i_\lambda \leqq \min(q, r) = s$$

$$1 \leqq j_1, \cdots, j_\mu \leqq r$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + \min\{j_\beta \mid 1 \leqq \beta \leqq \mu\} > q$$

とするとき，$2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha) > q$ ならば，$\lambda_E^*[\gamma] = 0$.

M を paracompact Hausdorff 微分可能多様体とし，$\mathcal{F}$ および $\mathcal{F}'$ を codimensions がそれぞれ q, r の，M の上の微分可能 foliations とする。 F, F' を $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ の tangent bundles で，F が F' の subbundle であるとする。 $Q = T(M)/F'$ の frame bundle $E_T(M, p_T, GL_r)$ は $(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r-bundle となることがわかっている。 これに系3.3を適用して，次のような結論を得る。

系 3. 4. $(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E_T(M, p_T, GL_r)$ の Bott の特性類の準同形を λ_E^* : $H^*(WO_{q,r}) \longrightarrow H^*_{DR}(M; C)$ とする。 $(M, \mathcal{F})$ の上の $E_T(M, p_T, GL_r)$ が transversal projectable connection をもつならば，特性類

$$\lambda_E^*[c_{i_1} \cdots c_{i_\lambda} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_\mu}]$$

$$1 \leqq i_1, \cdots, i_\lambda \leqq \min(q, r) = s$$

$$1 \leqq j_1, \cdots, j_\mu \leqq r$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + \min\{j_\beta \mid 1 \leqq \beta \leqq \mu\} > q$$

は，$2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha) > q$ ならば，0 となる。

注意，系3. 4において，$\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ としてみれば，M の

foliation $\mathcal{F}$ が transversal projectable connection を許容する（すなわち，$(M,\mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E_T(M, p_T, GL_r)$ が transversal projectable connection をもつ）ならば，$\mathcal{F}$ の Godbillon-Vey class $\lambda_E^*(c_1^q \otimes h_1)$ は 0 となることが示されている。

文　献

[1] R. Bott, Lectures on characteristic classes and foliations, Lecture Notes in Mathematics, 279, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, 1-76.

[2] P. Molino, Classes caracteristiques et obstruction d'Atiyah pour les fibrés principaux feuilletés, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 272 (1971), A1376-A1378.

[3] ―――――, Propriétés cohomologiques et propriétés topolagiques des feuilletages à connexion transverse projectable, Topology 12 (1973), 371-325.