

Stieltjes 変換による分布の特徴づけ
—特に単峰分布とモーメント問題について—

阪大 教養 石井 恵一

1. 序

Stieltjes 変換はモーメント問題の解析的研究において Nevanlinna 等により用いられた古典的な道具であるが、分布とモーメントの関係を探るのに便利である。

筆者はだいぶ以前に [2] において、この変換を単峰分布 (unimodal distribution) の特徴づけに応用し、特に単峰分布のモーメント問題がそれを用いて容易に扱われることを示した。ここでは、まずその結果の概要を引用した上で、さらに単峰分布の構造を Stieltjes 変換を用いて考察することにした。

定義 F を実数空間上の確率分布とするとき、

$$I(z; F) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(t)}{z-t} \quad (z: \text{複素数})$$

を F の Stieltjes 変換 という。

定理 1 (cf. Shohat-Tamarkin [1], Chap. II).

$I(z; F)$ は複素平面上の $\text{Im } z = y > 0$ において analytic, $\text{Im } I(z; F) \leq 0$, かつ, 任意の ε ($0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$) に対し扇形領域

$$(1) \quad \varepsilon \leq \arg z \leq \pi - \varepsilon$$

において $z \rightarrow \infty$ とするとき

$$(2) \quad z I(z; F) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dF(t) = 1.$$

逆に, 関数 $f(z)$ が $y > 0$ において analytic, $y > 0$ において $\text{Im } f(z) \leq 0$, かつ, 扇形領域 (1) で $z \rightarrow \infty$ のとき $z f(z) \rightarrow 1$ をみたすならば, $f(z)$ は $y > 0$ においてある分布関数 F の Stieltjes 変換であり, F は一意的である。

[注]. とくに, F が閉区間 S 上の分布である必要十分条件は, $I(z; F)$ が複素平面上実軸上の区間 S を除いて analytic なること (cf. Isii [2]).

定理 2 (cf. [1]). F が $2n$ 次までのモーメント μ_r ($r=1, 2, \dots, 2n$) をもつとき,

$$(3) \quad I(z; F) = \frac{1}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \dots + \frac{\mu_{2n}}{z^{2n+1}} + R_{2n+1}(z),$$

ただし, 扇形領域 (1) で $z \rightarrow \infty$ のとき $R_{2n+1}(z) = o(z^{-2n-1})$ と表わされる。

逆に, 分布 F の Stieltjes 変換 $I(z; F)$ が (3) の形に表わされるならば F は $2n$ 次までのモーメントをもち, それらは

(3) の右辺における $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2n}$ に等しい。

逆変換 (Stone [3]). $t_1 < t_2$ に対し

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [F(t_2+0) + F(t_2-0)] - \frac{1}{2} [F(t_1+0) + F(t_1-0)] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} - \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \text{Im} I(t+i\delta; F) dt \end{aligned}$$

2. 単峰分布

定義 分布 F が mode β において 単峰 であるとは,
 $x_1 < x_2 < \beta < x_3 < x_4$ をみたす任意の x_1, x_2, x_3, x_4
 に対し

$$F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \{F(x_1) + F(x_2)\}$$

$$F\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \{F(x_3) + F(x_4)\}$$

が成り立つこと。

この定義は次のことと同値である：

上のような x_1, x_2, x_3, x_4 と任意の $h > 0$ に対し

$$F(x_1) - F(x_1-h) \leq F(x_2) - F(x_2-h)$$

$$F(x_3+h) - F(x_3) \geq F(x_4+h) - F(x_4)$$

定理 3 (cf. [2]). F が β において単峰であるための必要
 条件は、任意の θ ($0 < \theta < \pi$) に対し、半直線 $\arg(z-\beta)$
 $= \theta$ に沿って z が β から遠ざかるとき $\text{Im} I(z; F)$ が単調
 非減少なこと。

系1 F が β において単峰であるための必要条件是,
 $-(z-\beta) I'(z; F)$ がある分布のStieltjes変換であること.

証明 $\beta=0$ として一般性を失わない.

(必要) F が0において単峰とする. $f(z) = I(z; F)$ とおき,
 $z = re^{i\theta}$ とかくと,

$$\frac{\partial}{\partial r} f(z) = f'(z) \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z}{r} f'(z)$$

だから, 定理3により $\text{Im } z = y > 0$ において

$$(4) \quad \text{Im} [z f'(z)] \geq 0.$$

$g(z) = -z f'(z)$ とおくと, $\text{Im } z > 0$ において $g(z)$ は analytic であり (4) により

$$(5) \quad \text{Im } g(z) \leq 0.$$

また, (2) により $f(z) = \frac{1}{z} + R(z)$, ただし, 扇形領域 (1) で $z \rightarrow \infty$ とすると $R(z) = o\left(\frac{1}{z}\right)$, とかける.

$$\text{したがって, } g(z) = \frac{1}{z} - z R'(z).$$

$\varepsilon > 0$ を任意に固定すると, (1) をみたす各 z に対し z を中心とする円 $C = \{z \mid |z - \zeta| = |\zeta| \sin \frac{\varepsilon}{2}\}$ は扇形領域 $\frac{\varepsilon}{2} \leq \arg \zeta \leq \pi - \frac{\varepsilon}{2}$ に含まれるから

$$(6) \quad R'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{R(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

と積分表示でき, (1) において $R'(z) = o\left(\frac{R(z)}{z}\right) = o\left(\frac{1}{z^2}\right)$ を得る. ゆえに (1) において $z \rightarrow \infty$ のとき

$$(7) \quad z g(z) \longrightarrow 1$$

となり, 定理1により $g(z)$ はある分布の Stieltjes 変換である.

十分). $-z I'(z; F) = I(z; G)$ とする. $f(z) = I(z; F)$, $g(z) = I(z; G)$ とおくと, g が (5) をみたすことから f が (4) をみたし, 定理3によって F が 0 において単峰であることがわかる.

[注]. さらに強い結果として, 任意の分布 G に対し,
 $-z I'(z; F) = I(z; G)$ となる単峰分布 F が (一意的に) 存在する. 実際, $L \in \mathbb{R}$ を始点とし, (ある ε に対する) 扇形領域 (1) の中で ∞ へ行く任意の path とするとき, z の関数 $f(z) = \int_L^z \frac{I(\zeta; G)}{\zeta} d\zeta$ は定理1の条件をみたすこと, L のえらび方によらないこと, および $-z f'(z) = I(z; G)$ となることが簡単な計算で確かめられ, $f(z) = I(z; F)$ となる分布 F の存在がわかる. このことと, 上の系1から

系2. 閉区間 \mathcal{D} 上の β における単峰分布全体の族 $\mathcal{F}_\beta(\mathcal{D})$ と, \mathcal{D} 上の分布全体の族 $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ との間に

$$(8) \quad - (z - \beta) I'(z; F) = I(z; G) \quad (F \in \mathcal{F}_\beta(\mathcal{D}), G \in \mathcal{F}(\mathcal{D}))$$

により 1対1の対応が成り立つ.

3. モーメント問題

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ を実数とする。区間 S 上の確率分布 F が $\int_S x^k dF(x) = \mu_k$ ($k=1, 2, \dots, m$) をみたすとき, F は モーメント問題 $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \mid S\}$ の解であるという。

前節の系 2 を用いると,

定理 4. (8) により $F \in \mathcal{F}_\beta(S)$ が $G \in \mathcal{F}(S)$ に対応しているとき, F がモーメント問題 $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2n} \mid S\}$ の解ならば, G はモーメント問題 $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2n} \mid S\}$ の解である。ただし, $\nu_r = (r+1)\mu_r - \beta r \mu_{r-1}$, ($\mu_0 = 1$)。

証明. 定理 2 により $I(z; F)$ は (3) の形に表現されるから, (8) により

$$I(z; G) = \frac{1}{z} + \frac{\nu_1}{z^2} + \frac{\nu_2}{z^3} + \dots + \frac{\nu_{2n}}{z^{2n+1}} - (z-\beta) R_{2n+1}'(z)$$

の形になる。しかも ν_1, \dots, ν_{2n} は定理で与えたものになる。

(6) と同様の論法で $R_{2n+1}'(z) = o(z^{-2n-1})$ ((1) で $z \rightarrow \infty$) が示されるから, 再び定理 2 により, G のモーメントは $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2n}$ と一致する。

系 モーメント問題 $\{\mu_1, \dots, \mu_{2n} \mid (-\infty, \infty)\}$ が $\beta \in \text{mode}$ とする単峰な解をもつための必要条件は,

$$\Delta_r(\beta) = \begin{vmatrix} 1 & \beta & \beta^2 & \dots & \beta^{r+1} \\ 0 & \mu_0 & 2\mu_1 & \dots & (r+1)\mu_r \\ \mu_0 & 2\mu_1 & 3\mu_2 & \dots & (r+2)\mu_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\mu_{r-1} & \dots & \dots & \dots & (2r+1)\mu_{2r} \end{vmatrix} \quad (\mu_0 = 1)$$

とおくとき, 次の2つのいずれかが成り立つこと:

(i) $\Delta_r(\beta) > 0$ ($r=1, 2, \dots, n$).

(ii) ある $k < n$ に対して $\Delta_i(\beta) > 0$ ($i=1, \dots, k$)

$$\Delta_i(\beta) = 0 \quad (i=k+1, \dots, n)$$

[注1] (ii) の場合は分布は一意的に定まる.

[注2] $\mathcal{S} = [0, \infty)$, $\mathcal{S} = [0, 1]$ 等の場合にも, 同様にして類似の結果が成り立つ.

[注3]. すべてのモーメント μ_r ($r=1, 2, \dots$) が与えられたときは, 上で $r \leq n$ の制限をとり去ればよい. さらに, 解が一意的 (たとえば Carleman の条件 $\sum \mu_{2n}^{-\frac{1}{2n}} = \infty$ のとき) ならば, 単峰分布が上の系により特徴づけられる.

証明. $\Delta_r' = \begin{vmatrix} 1 & \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_r \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \dots & \nu_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu_r & \nu_{r+1} & \dots & \dots & \nu_{2r} \end{vmatrix}$ とおくとき, よく知ら

れた Hamburger のモーメント問題 $\{\nu_1, \dots, \nu_{2n} \mid (-\infty, \infty)\}$ が解をもつための条件は, 2条件

(i) $\Delta_r' > 0$ ($r=1, \dots, n$)

(ii) ある $k < n$ に対し $\Delta_i' > 0$ ($i=1, \dots, k$), $\Delta_i' = 0$ ($i=k+1, \dots, n$)

のいずれかが成り立つことである. したがって, 定理4に注意すれば, $\Delta_r' = \Delta_r(\beta)$ を示せばよい. 実際, $\Delta_r(\beta)$ の $r+1$ 列に β を乗じて $r+2$ 列から引き, 次に r 列に

β を乗じて $r+1$ 列から引き, 以下同様にしてゆくと,

$$\Delta_r(\beta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \nu_1 & \cdots & \nu_r \\ \mu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\mu_{r-1} & \nu_r & \nu_{r+1} & \cdots & \nu_{2r} \end{vmatrix} = \Delta_r'$$

となる.

4. 単峰分布の族の構造

一般性を失わずに mode β は 0 と仮定する. $F \in \mathcal{F}_0$ は定理 3 系 2 により, Stieltjes 変換が

$$-z I'(z; F) = \bar{I}(z; G) \quad (G \text{ はある分布})$$

をみたすものとして特徴づけられる. これから,

$$I'(z; F) = -\frac{1}{z} \bar{I}(z; G) = -\frac{1}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dG(t)}{z-t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{z(z-t)} dG(t).$$

ところが, 区間 $[0, t]$ ($t < 0$ のときは $[t, 0]$) の一様分布を U_t とすれば

$$I'(z; U_t) = \frac{-1}{z(z-t)}$$

$$\text{であるから,} \quad \bar{I}(z; F) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{I}(z; U_t) dG(t).$$

故に,

$$(9) \quad F = \int_{-\infty}^{\infty} U_t dG(t).$$

これは, 任意の $F \in \mathcal{F}_0$ は一様分布族 $\{U_t \mid -\infty < t < \infty\}$ の mixture として (9) のように表現されることを示す. 実

際, \mathcal{F}_0 は符号つき測度全体のつくるベクトル空間の凸集合であり, (5) から一様分布 U_t がその extreme point である。

また, このことから直ちに Khintchine の定理: 「 X が 0 を mode とする単峰分布に従うための必要条件は, $X = ZY$ (Z は $[0, 1]$ の一様分布に従う確率変数, Y は Z と独立な任意の確率変数) と表わされること」の別証が得られる。実際, Y の分布を G とすれば, $\Pr\{ZY \leq x\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{tZ \leq x\} dG(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_t(x) dG(t)$ となり, ZY の分布が (9) の F に相当するからである。

参考文献

- [1] Shohat, J. A. and Tamarkin, J. D., The problem of moments. Mathematical Surveys, No. 1. American Mathematical Society (1943).
- [2] Isii, K., Note on a characterization of unimodal distributions. Ann. Inst. Statist. Math. 9 (1958).
- [3] Stone, M. H., Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 15 (1932).