数理解析研究所講究録
第224巻 1974年 123-133

非線型常微分方程式の解の幾何的性質についての一考察

東大 理　岡本和夫

非線型方程式の解のふるまいについて，近頃これを幾何的な立場から考察するということが研究されだしたが，この小論ではその方面の研究を

R. Gerard — A. Sec ; Feuilletages de Painlevé
(Bull. Soc. math. France., 100 (1972))

での研究を紹介しながらすすめてみたい。

§1. 定義

F, B を連結な複素解析的多様体，$E = F \times B$，$\pi; E \longrightarrow B$ を projection とする。また E には葉層構造が定義されているものとする。これを $\mathcal{F}$ で表わす。E の点 m に対し，m を通る葉体を f_m，m の十分小さな近傍 D をとったとき $f_m \cap D$ の m を含む連結成分を plaque とよびこれを $f_{m,D}$ と書く。

定義.1　$\mathcal{F}$ が projection π について simple であるとは，任意の点 $m \in E$ において十分小さな近傍 D をとると $f_{m,D} \cap \pi^{-1}(\pi(m))$

がただ1点 $\{m\}$ からなるときをいう。

以下、ことわらない限り、E の葉層 $\mathfrak{F}$ は $\dim \mathfrak{F} = \dim B := n$ をみたすとする。また $\dim F = q$ （$\dim E = n+q$）とする。

<u>定義.2</u>　$l : I = [0,1] \longrightarrow B$ を B における道（arc），$m \in \pi^{-1}(l(0))$ とする。連続写像 $\hat{l} : I \longrightarrow f_m$ で、$\hat{l}(0) = m$，$\pi(\hat{l}(t)) = l(t)$ を満足するものが存在するとき、これを l の m を通る葉体 f_m への <u>lifting</u> という。

<u>定義.3</u>　$\mathfrak{F}$ が P_1－型の葉層であるとは、すべての B の arc，$l : I \longrightarrow B$ に対して任意の点 $m \in \pi^{-1}(l(0))$ を通る葉体 f_m への l の lifting $\hat{l}$ が存在するときをいう。

定義から明らかに、$\mathfrak{F}$ が P_1型であるときすべての葉体 $f \in \mathfrak{F}$ について $\pi|_f : f \longrightarrow B$ は onto である。

　次に、S を E の部分集合で、勝手な点 $x \in B$ について $S \cap \pi^{-1}(x)$ が discrete であるようなものとする。また $\mathfrak{F}_S$ を $E-S$ において定義されている葉層とする

<u>定義.4</u>　$\mathfrak{F}$ が P_2型であるとは、B の道 $l : I \longrightarrow B$ で、その端点を除いた道 $l|_{[0,1)} : [0,1) \longrightarrow B$ がすべての点 $m \in \pi^{-1}(l(0)) - S$ を通る葉体 f_m への lifting をもつようなものは、実は $\overline{f_m}$（f_m の E での閉包）への lifting $\hat{l} : I \longrightarrow \overline{f_m}$ をもつときをいう。

さて、$l_{\varepsilon_1} ; [0, \varepsilon_1) \longrightarrow B$　$l_{\varepsilon_2} ; [0, \varepsilon_2) \longrightarrow B$ を $x_0 = l_{\varepsilon_1}(0) = l_{\varepsilon_2}(0)$

を通る道とする。このとき $0<\varepsilon<\inf(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ なる正の数 ε と $l_\varepsilon = l_{\varepsilon_1}|_{[0,\varepsilon)} = l_{\varepsilon_2}|_{[0,\varepsilon)}$ なる道 $l_\varepsilon : [0,\varepsilon) \longrightarrow B$ が存在するならば、l_{ε_1} と l_{ε_2} とは $x_0 = l_\varepsilon(0)$ で同じ <u>germ</u> を定めるということにする。また $l : [0,1] \longrightarrow B$ に対して $\varepsilon>0$ であって $l|_{[0,\varepsilon)}$ が $m\in\pi^{-1}(l(0))$ を通る葉体 f_m への lifting をもつようなものが存在するとき l の $l(0)=\pi(m)$ で定義する germ は f_m へ lift 可能であると言うことにする。$\hat{l}$ を l のひとつの lifting とするとき、$\hat{l}$ の $\hat{l}(0)$ で定める germ は l の $l(0)$ で定める germ の lifting である、という。

<u>§2.</u> simple foliation について

まず、いくつかの補題を準備する。

<u>補題 1.</u> $m\in E$, $\mathcal{F}$ は simple foliation とする。このとき m の近傍 D が存在して、$\mathcal{F}$ の D 内のすべての plaque $f_{m';D}$ は D のなかですべての fiber, すなわち $\{x\}\times F\cap D$ ($x\in\pi(D)$) とかならず、そして高々有限回交わる。

(略証) $m\in E$、m の近傍 D' を十分小さくとると、$\mathbb{C}^n$ の open set U, $\mathbb{C}^q$ の open set V, および analytic isomorphism φ, φ' で次の図式を可換にするようなものが存在する;

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{\varphi} & U\times V \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \pi(D') & \xrightarrow{\varphi'} & U \end{array} \qquad \varphi(m)=(0,0).$$

$U\times V$ に $\mathcal{F}$ から induce されたfoliationを $\tilde{\mathcal{F}}$ とおいて. 以下 $\tilde{\mathcal{F}}$ について考えることにする。. Ω_0 を $(0,0)$ の十分小さな近傍とする。$(0,0)$ を通る plaque を f_{0,Ω_0} とかく. さて. このとき. U_1, V_1 をそれぞれ $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^q$ における open polydisc とすると. analytic isomorphism $h_0 : \Omega_0 \longrightarrow U_1\times V_1$ で、$U_1\times V_1$ における plaque が $\{y_1 = y_1^0\}$ となるようなものが存在する。. h_0^{-1} を次のように表わす: $x = h(x_1, y_1)$, $y = k(x_1, y_1)$.

Ω_0 における plaque は $\{x = h(x_1, y_1^0),\ y = k(x_1, y_1^0)\}$ のように表わすことができる。. 仮定から $0 = h(x_1, 0)$, $y = k(x_1\ 0)$ は. ただひとつの解 $(x_1, y) = (0,0)$ をもつことに注意する。. ここで G を. $U\times V_1\times U_1\times V$ において. $x = h(x_1, y_1)$, $y = k(x_1, y_1)$ で定義される analytic. variety.

$\hat{p} : U\times V_1\times U_1\times V \longrightarrow U\times V_1$ を projection とする。.

前の注意から $\hat{p}^{-1}((0,0))\cap G = \{(0,0,0,0)\}$. 従って Remmert の prolongation theorem から. $U\supset U'$, $V_1\supset V_1'$ と少しけずれば、$G\cap\hat{p}^{-1}(U'\times V_1')$ は $U'\times V_1'$ 上の有限な ramified cover になっている。

$h_0^{-1}(U_1\times V_1') = \Omega_0'$ とおけば. $\forall x\in U'$ に対して. $p^{-1}(x)$ はすべての plaque と有限回交わる (∎)

<u>補題 2.</u> $U = \{|x| < \alpha\}\subset\mathbb{C}^n$, $V = \{|y| < \beta\}\subset\mathbb{C}^q$ とする。

$U\times V$ で定義された simple foliation $\mathcal{F}$, $\dim\mathcal{F} = n$ を考える。$l : [0.1] \longrightarrow U$ を道 ($l(0) = 0$) とすると. l は $p^{-1}(l(0))$ の点 0 を通る $\mathcal{F}$ の葉体 f_0 への lifting をもつ。

(略証) 0 において f_0 は fiber に transversal ならば補題はあきらか

以下．そうでないとする。Ω_0 を 0 の近傍で．0 を通る plaque f_{0,Ω_0} は $p^{-1}(\ell(0))$ と1点 0 のみで交わるものとすると．f_{0,Ω_0} は Ω_0 において codim $= q$ の analytic variety であるから．再び Remmert の結果がつかえて．$\tilde{U} \subset U$，$\tilde{V} \subset V$ を各々 polydisc とすると．f_{0,Ω_0} は $\tilde{U} \times \tilde{V}$ において．analytic variety $\mathbb{V}$: $P_i(x, y_i) \equiv y_i^{k_i} + a_{i1}(x) y_i^{k_i - 1} + \cdots + a_{ik_i}(x) = 0$（$a_{ij}(x)$ は $\tilde{U}$ で正則かつ $a_{ij}(0) = 0$ ）へ prolong できる。さらにこのとき $f_{0,\Omega_0} \cap (\tilde{U} \times \tilde{V})$ は．$\mathbb{V}$ のひとつの irreducible component であるから、これを $\mathbb{V}_\alpha$ とすると．この $\mathbb{V}_\alpha$ は．ほとんどいたるところ $(\tilde{U} \times \tilde{V}, p, \tilde{U})$ において transversal。このことから Lemma 2 はしたがう（∎）.

以上の補題によって次の定理を得る：

<u>定理.1</u> $\mathcal{F}$ は simple foliation で $\dim \mathcal{F} = \dim B$ とする。また、$\ell : I \longrightarrow B$ を B の道、$m \in \pi^{-1}(\ell(0))$ とする。ℓ の $\ell(0)$ に定める germ は m を通る $\mathcal{F}$ の葉体へ lift 可能であり、しかもその lifting のコスウ K は m だけによる。.

とくに、　$E = B \times F$ で F が compact の場合には次のことも言える。.

<u>定理.2</u> $\mathcal{F}$ が simple foliation で、さらに F が compact のとき．$\mathcal{F}$ は P_1-型 の葉層構造である。

この場合には．任意の葉体 $f \in \mathcal{F}$ に対して $\pi|_f : f \longrightarrow B$ は onto である。.

$\ell : I \longrightarrow B$ を固定して考えよう。$m \in \pi^{-1}(\ell(0))$ をうごか

したとき、l の m を通る葉体への lifting について次のことが言える。

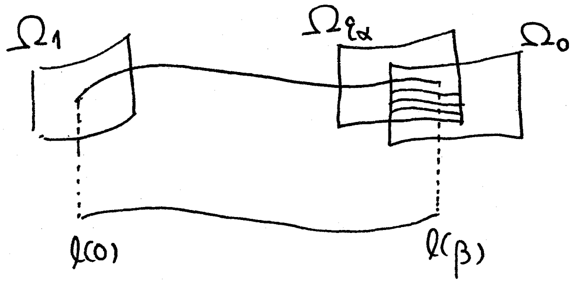
<u>定理3</u> $\hat{l}$ を l のある葉体への lifting とする。このとき、整数 $k>0$ と、$\hat{l}(0)$ の $\pi^{-1}(l(0))$ での近傍 V が存在して、すべての点 $m\in V$ を通り、$\hat{l}(1)$ の $\pi^{-1}(l(1))$ での近傍におわるような l の lifting のコスウは高々 k である。

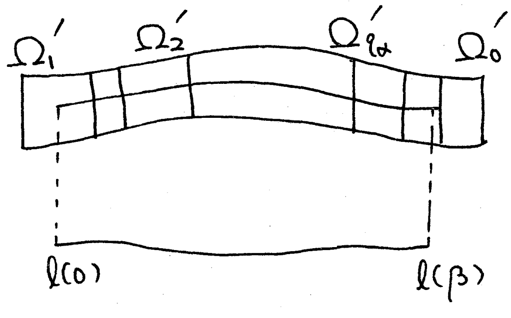
(略証) 次のような α $0<\alpha\leq 1$ の集合を $\mathcal{E}$ とする.

1° ある正の整数 k_α が存在して.

2° $\hat{l}([0,\alpha])$ の有限コの開集合による被覆 $\Omega=\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_{q_\alpha}$ で、任意の $m\in\Omega_1\cap\pi^{-1}(l(0))$ を通る葉体への $l:[0,\alpha]\longrightarrow B$ の、Ω における lifting のコスウは高々 k_α.

前の定理から、$\mathcal{E}\neq\phi$ である。$\beta=\sup\{\alpha;\alpha\in\mathcal{E}\}$ とおく。





Ω_0 を $\hat{l}(\beta)$ の近傍で、定理1.にのべられたようにとる。$\alpha<\beta$ を $l(\alpha)\in\pi(\Omega_0)$ のようにとれば、$\alpha\in\mathcal{E}$ であるから上の1°, 2°を満たすように $\Omega\equiv\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_{q_\alpha}$ がとれ、$\Omega\cup\Omega_0\supset\hat{l}([0,\beta])$ しかも $\Omega_1\cdots\Omega_{q_\alpha}$ を小さくとりなおすことによって $\Omega'=\Omega_1'\cup\cdots\cup\Omega_0'$

がやはり上の (イ), (ロ) をみたすようにとれる。このことから $\beta \in \mathcal{E}$. よって、
$\mathcal{E} = [0, 1]$ (∎).

最後に、S を E の subset で定義4にのべたのと同じものとし、$\mathcal{F}_S$ を $E - S$ で定義された simple foliation とする。また、
$\dim \mathcal{F}_S = \dim B$ とする。このとき

定理.4 $E = F \times B$ で、F が compact ならば、$\mathcal{F}_S$ は
P_2-型の葉層構造である。

(略証) $\hat{l}_\varepsilon$ を $l_\varepsilon : [0, \varepsilon) \longrightarrow B$ ($l_\varepsilon = l|_{[0,\varepsilon)}$) の lifting とする. fiber が compact であるから $\overline{\hat{l}_\varepsilon([0,\varepsilon))} \cap \pi^{-1}(l(\varepsilon)) \neq \phi$. そこで $b \in \overline{\hat{l}_\varepsilon([0,\varepsilon))} \cap \pi^{-1}(l(\varepsilon)) \equiv \Delta$ とする。(1) $b \in E - S$ のとき. 前の定理によって b をこえての lifting 可能. (2) $b \in S$ かつ Δ が 1点のとき. この場合もよい。そこで (3) b, $b' \in \Delta \cap S$ とする。($b \neq b'$) V_b, $V_{b'}$ を $\pi^{-1}(l(\varepsilon))$ における b, b' の近傍で $V_b \cap V_{b'} = \phi$ なるものとする。一方, 点列 $\{t_m\}$, $\{t_m'\}$ を, $t_m \to \varepsilon$, $t_m' \to \varepsilon$, $t_m < t_m' < t_{m+1}$, $\hat{l}(t_m) \longrightarrow b$, $\hat{l}(t_m') \longrightarrow b'$ のようにとっておく。すると. $l(\varepsilon)$ の B での近傍 V_ε を十分小さくとれば, 点列 $\{t_m''\}$ を.
$t_m < t_m'' < t_m'$, $\hat{l}(t_m'') \notin V_\varepsilon \times V_b$, $\hat{l}(t_m'') \in V_\varepsilon \times V_{b'}$ のようにとれる。再び. F が compact なることを用いて. $\hat{l}(t_m'') \longrightarrow b''$. $b'' \in S$ となる (必要ならば部分列をとりなおすことにより)。このことから. $S \cap \pi^{-1}(l(\varepsilon))$ が discrete でないことがわかり. 従って (3) の場合はおこり得ない。(∎).

§3. 応用

以上得られたいくつかの定理を応用してみる。

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ を x,y の多項式(互いに素とする)として

$$\omega \equiv Q(x,y)\,dy - P(x,y)\,dx = 0$$

を考えよう。$\tilde{\omega}=0$ を ω の $\mathbb{C}_x \times \mathbb{P}^1_y$ への prolongation とする。π を projection $\mathbb{C}_x \times \mathbb{P}_y \longrightarrow \mathbb{C}_x$, S_1 を $\tilde{\omega}=0$ の特異集合、S_2 を $x=$ Constant という $\tilde{\omega}=0$ の積分曲線全体とする。$S=S_1 \cup S_2$ $\pi(S)=\theta$ とすると $\mathbb{C}-\theta \neq \phi$. またあきらかに、$\tilde{\omega}=0$ で定義される foliation は $((\mathbb{C}-\theta)\times\mathbb{P}^1, \pi, \mathbb{C}-\theta)$ で simple であり、従って P_1-型である。この結果は古くから知られた結果「一階代数的常微分方程式の動く分岐点は代数的である」にほかならない。次に我々はこれを $\omega=0$ の解 $y=\varphi(x, y_0, x_0)$ の初期値 y_0 についての性質を調べることに応用する。以下約束として、$\varphi(x, y_0, x_0)$ を x, x_0 を固定して y_0 の関数として考えるとき $\varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$ などと表わすことにしよう(複素共役との誤解はないと思う)。注意すべきことは、Painlevé の Leçon に述べられている定理「$\varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$ は y_0 についても代数的である」は正確ではない。$\varphi(\bar{x}, y_0, \bar{x}_0)$ が y_0 について超越特異点をもつこともありうることは、Painlevé 自身によっても後に注意されている。たとえば $y'=\dfrac{y}{x(1+y)}$ の解を考察せよ。

さて、$l:[0,1] \longrightarrow B$ をひとつの道、$\hat{l}$ をある葉体への lifting とする。この葉体を f' とかく。$l(0)$, $l(1)$ の小さな近傍 V_0, V_1 を $V_0 \ni l(t)$: $0 \leq t < \varepsilon$, $V_1 \ni l(t)$: $1-\varepsilon < t \leq 1$ となる

ようにとる($\varepsilon>0$ は十分小さいとする)。また f' の $\hat{l}(1)$ の近傍における plaque は $\pi^{-1}(l(t)):1-\varepsilon<t<1$ に対しては transversal として一般性を失わない。さらにかんたんのため、f' が $\hat{l}(0)$ の近くで定める plaque は $\pi^{-1}(l(t)):0\leq t<\varepsilon$ と transversal としよう。l の十分小さな変形 l' であって (1) l' は f' への lifting $\hat{l}'$ をもつ (2) $\hat{l}(t)=\hat{l}'(t)$: $0\leq t<\varepsilon,\ 1-\varepsilon<t\leq 1$ (3) f' は $\pi^{-1}(l'(t))$: $0\leq t<1$ と transversal となるようなものがとれることは補題1.2および定理1.からわかる。また定理3.の証明からわかるように、$\hat{l}'(0)$ の($\pi^{-1}(l'(0))$ の)近傍から出発し、$\hat{l}'(1)$ の($\pi^{-1}(l'(1))$ の)近傍に終わるような lifting は、終点の直前までは一意的(葉体をひとつ指定すれば)である。以上の考察を $y=\varphi(x,y_0,x_0)$ に適用すれば次のことがわかる。

l を $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$ を結ぶ道($\subset \mathbb{C}-\Theta$)で、解 $y=\varphi(x,\bar{y}_0,\bar{x}_0)$ は l に沿って $x=\bar{x}_1$ を除いて正則に接続可能とする。このとき $|y_0-\bar{y}_0|<\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ 十分小)なる y_0 について $\varphi(x,y_0,\bar{x}_0)$ も l に沿って $\bar{x}_1$ を除いて正則に接続可能であり、こうして得られた解 $\varphi(\bar{x}_1,y_0,\bar{x}_0)$ は $y_0=\bar{y}_0$ で代数的である。

さらに、次の結果は大切である。

もし一階代数的方程式の解が動く分岐点をもたないならば $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in(\mathbb{C}-\Theta)$を勝手にとるとき、すべての y_0 ($y_0=\infty$ をも含めて!)で $\varphi(\bar{x}_0,y_0,\bar{x}_1)$ は正則である。即ちこの場合、一般

解は初期値 y_0 の有理関数である。

最後に連立方程式に応用してみよう。$\mathbb{C}_x\times\mathbb{P}^2$ における微分方程式の一般形は次のようになる.

$$\Sigma:\ \frac{dx}{X}=\frac{tdy-ydt}{tA-yC}=\frac{tdz-zdt}{tB-zC}$$

X, A, B, C は (y, z, t) の homogeneous polynomial で

$$\deg A=\deg B=\deg C=\deg X+1$$

$\pi:\mathbb{C}_x\times\mathbb{P}^2\longrightarrow\mathbb{C}_x$ を projection，S_1 を Σ の特異集合とする。S_1' を $\pi^{-1}(x)\cap S_1$ が discrete でないような S_1 の部分集合、S_2 を S_1' と、$x\equiv$ constant という形の Σ の積分曲線の合併とする。ここで次の3つの場合が考えられる。

Case. 1　$\pi(S_1)\neq\mathbb{C}$，　$\pi(S_2)\neq\mathbb{C}$

このときは $\theta=\pi(S_1\cup S_2)$ とおくと Σ は $((\mathbb{C}-\theta)\times\mathbb{P}^2, \pi, \mathbb{C}-\theta)$ で simple な葉層を定義する。従って P_1-型である。微分方程式のほうでいえば、一般の場合解 $y=\varphi(x, y_0, z_0, \bar{x}_0)$，$z=\psi(x, y_0, z_0, \bar{x}_0)$，$t\equiv 1$ は動く超越特異点はもたないということになる

Case. 2　$\pi(S_1)=\mathbb{C}$.

この条件からただちに次のことがわかる。すなわち、Σ の解が動く超越特異点をもつための必要条件は. 任意の x に対し.

$$X=0\quad tA-yC=0\quad yB-zA=0\ ,\quad tB-zC=0$$

が解をもつことである。ただしこの条件は十分ではない。たとえば二階単独方程式の場合を考えればよい。

またX＝0がΣの特殊解を定義する場合、これはΣの解が動く真性特異点をもつための必要条件となる。この場合には、$\pi(S_2)=\mathbb{C}$ となる。ただしこの条件もまた十分ではない。

以上見てきたようにこのような幾何的な考察は、見通しがよいという利点がある。ただし、これまで知られているような個々の深い結果を統一するまでにはまだ不十分だし、また本質的な結果を得るためには他のいろいろな考察が必要であろう。これらは将来に残された問題である。