数理解析研究所講究録
第 227 巻 1975 年 23-32

双曲型方程式の基本解のミクロ解析性

京大数研　三輪哲二

双曲型方程式は超函数論が威力を発揮する典型的な例のひとつである。河合は早く、修士論文[1]において、定数係数作用素P(D)に対して、その主シンボル$P_m(\xi)$がreal rootであることとP(D)がconeにsupportを持つ基本解を持つ事とが同値である事を指摘した。引き続き[2]では、浜田[3]の定理を用いて、単一特性的な作用素の基本解を構成し、その特異スペクトルがbicharacteristic conoidに載っている事を示した。その後Schapira と Bony [4]は、複素領域におけるanalysisを通じて、主要部がreal rootであればCauchy問題が常に解ける事を示した。低階や重複度に何ら制限を加えずによい事は実に超函数論の優秀性を物語っていた。一方柏原[5]は、特異スペクトルがconeに含まれるような基本解を持つ定数係数作用素を特徴づけたが、最後に佐藤-河合-柏原[6]における擬微分方程式論の進展は、河合-柏原[7]によってミクロ双曲型作用素の理論として全く一般の扱いを可能にした。すなわち、micro-localに双曲型という概念が定義され、基本解が構成されたのである。

しかしながら、定数係数の理論がすべて包含されたわけではなく、Atiyah-Bott-Gårding[8]によるlacunaの理論とBernstein[9]による

基本解の満たす最大過剰決定系の理論とは未だ拡張されていない。前者は基本解の特異スペクトルの位置を決める問題であり後者は基本解の満たす方程式を決める問題である。後者の完全な解決は前者の解決に十分であろうが，定数係数の場合でさえその点は出来ていない。(**) ここでは，前者を直接扱う。実は，必要な道具立ては河合-柏原[7]に含まれている。ただやってみればよい。

重複度一定の場合は，最近浜田の定理が彼自身により一般に出来上がったから河合[2]の方法で済んでいる。(*) 重複度一定でないと事は面倒である。浜田[10]は，彼の定理が拡張できない例を二つ与えた。第一の例は

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}$$

で，これに対応する特性面を求める方程式は

$$\begin{cases} \varphi_{x_1}^2 - \varphi_{x_2}\varphi_{x_3} = 0 \\ \varphi(0, x_2, x_3) = x_2 \end{cases}$$

となって，φ_{x_1}について正規形に解けない為，この場合は複素1パラメタの解が存在し，その為に，特異Cauchy問題の解はそれらの特性面の実1パラメタの包絡面で区切られる領域に自然境界を持ってしまうのであった。これでは境界値は取れない。第二の例は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

である。この場合は，二枚の特性面が $y = 0$ と $y - x^2 = 0$ である。

(**) その後，基本解が最大過剰決定系を満たすのは，単一特性でないなら，むしろ例外的な場合である事がわかった。(河合さんによる注意)

(*) もちろん Springer Lecture Notes の S-K-K 論文で，既に出来ていたし逆に浜田氏の結果は $C_{Y|X}$ を使って簡単な系となる。(河合さんによる注意)

しかも $\frac{1}{2\sqrt{y}}\log\left(\frac{\sqrt{y}+x}{\sqrt{y}-x}\right)$ が

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0 \quad u(0,y)=0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=\frac{1}{y}$$

の解を与える。ここで注意すべき事は，二枚の特性面が解の中で複合して出ている事である。相函数各々による展開の和の形に表示する事は出来ない。しかし上に与えられた解は境界値が取れる。そして Cauchy 問題の基本解を与え，その特異スペクトルが $y=0$, $y-x^2=0$ で決まる bicharacteristic の上にある事も明らかである。物事は意外に簡単かも知れないのだ。(例1は双曲型ではない!!)

Cauchy 問題の基本解がある事はわかっている。だとすれば，それはべらぼうな物になるはずはない。特異スペクトルは特性多様体に含まれその原点の上の fiber を含むような Lagrangean に載っているはずだ。ではそれは何であるべきか。まず扱いやすい作用素のクラスを設定する。

<u>定義</u> $x_0^* = (x_0, \xi_0) \in P^*X$

$V=\{(x,\xi)\in P^*X \,/\, p(x,\xi)=0\}$

p は reduced とは限らない。

$p(x,\xi)=p_1^{s_1}(x,\xi)\cdots p_m^{s_m}(x,\xi)$

をその既約分解とする。各 $V_i=\{p_i=0\}$ が x_0^* で単一特性的すなわち

$$d(x,\xi)P_i(x,\xi) \not\parallel \sum_j \xi_j dx_j$$

の時，V は x^*_0 で簡約可能(reductive)という。

双曲型作用素が簡約可能とは，実特性多様体の各点で簡約可能な事をいう。　　(定義終)

例　$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - t^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

このクラスはあまりに狭いが今の所これで我慢する。さて x^*_0 を通る各 V_i の bicharacteristic を V の bicharacteristic と定義すれば，簡約可能双曲型作用素に対しては，特性錐が定義できる。

定義　$P(x,D)$ を簡約可能双曲型とする。

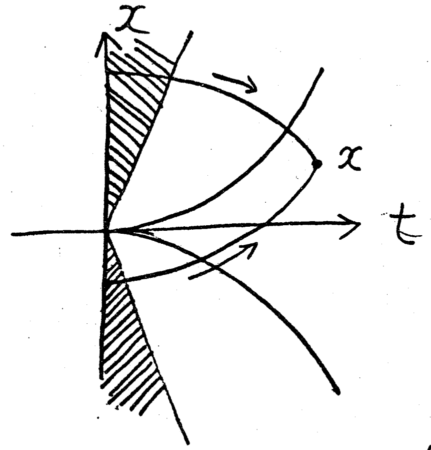
$V = \{\sigma(P)(x,\xi) = 0\}$　　$V_{\mathbb{R}} = V \cap \sqrt{-1}S^*M$

とすれば $(\pi : \sqrt{-1}S^*M \longrightarrow M)$

$\pi^{-1}(0) \cap V_{\mathbb{R}}$ の各点から出る実 bicharacteristic を集めたものは Lagrangean となる。これを特性錐という。　　(定義終)

しかし，この定義の特性錐が基本解の特異台を含むかというと，嘘である。それは定数係数ですら明らか。では正しい答は何か。

まず $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - t^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ を考えて見る。



Cauchy 問題の基本解を考える事にして
$Pu=0$ としよう。uは斜線部で 0 である。点 x で analytic であることを言いたい。
x の fiber は $V_{\mathbb{R}}$ と 2 点で交わり $V_{\mathbb{R}}$ はそこで単一特性だからそれぞれ bicharacteristic がでる。それらはずっと伸びてついに斜線部にはいる。ところがそこで 0 なのだから逆向きにミクロ解析性が伝播して結局 x で u は解析的。よってこの場合は, u の特異台は特性錐に含まれる。やってみれば自明であった。

この例では単一特性でなくなる所が $t=0$ にはいってしまうから簡単であった。では
そうでない場合に同様の推論をするとどうなるか。そこで reductive point の近くで bicharacteristic をもう少し詳しく調べてみる。

V の単一特性でない点の集合 S は

$$S=\bigcup_{i\neq j} S_{ij} \qquad S_{ij}=V_i\cap V_j$$

で与えられる。

x_0^*を通るm本のbicharacteristicをB_iとする。
次の三通りが考えられる。

i) $B_i \subset S$
ii) B_iとSはnormal crossing
iii) B_iはSに接するが含まれない。

定数係数では常にi)である。
簡単のため$m=2$とするならば(かつ$p_1=0$と$p_2=0$はnormal crossing)

i)は $\{p_1, p_2\} \equiv 0$ on S

ii)は $\{p_1, p_2\} \neq 0$

iii)は $\{p_1, p_2\} = 0$, $\not\equiv 0$

である。そこでii)の場合を考えよう。接触変換して$p_1 = x_1$, $p_2 = \xi_1$としてよい。
次の補題は、ミクロ解析性が単一特性でない点を通過して伝播する事を示す。

<u>補題</u> $P(x, D) = x_1 D_1 +$ 低階

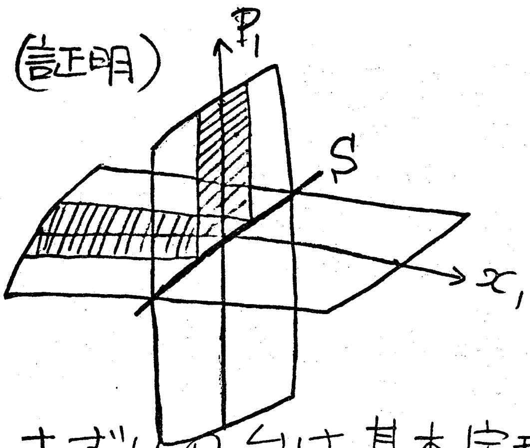
$$P(x, D)u = 0 \quad (u\text{は microfunction})$$

$$u = 0 \text{ on } \{(t, 0, \cdots, 0\ \sqrt{-1}(0, \cdots, 1)\infty) / t < 0\}$$

$$\text{and } \{(0, \cdots, 0\ \sqrt{-1}(t, 0, \cdots, 1)\infty) / t < 0\}$$

この時 $u = 0$ at $x_0^* = (0, \cdots, 0, \sqrt{-1}(0, \cdots, 1)\infty)$

（証明）



まずuの台は基本定理により$\{x_1=0\}\cup\{p_1=0\}$にある。PはS以外で単一特性だから、そこではミクロ解析性は伝播し、従って斜線部では0となる。よって

$$\operatorname{supp} u \subset \{x_1=0,\ p_1\geqq 0\}\cup\{x_1\geqq 0,\ p_1=0\}$$

従って $\operatorname{supp} u$ の x_0^* に関する normal set（[7] 参照）は高々

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial}{\partial p_1}\geqq 0\right\}\cup\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\geqq 0,\ \frac{\partial}{\partial p_1}=0\right\}$$

に含まれる。Pが $x_0^*+\sqrt{-1}\left(-\frac{\partial}{\partial p_1}+\frac{\partial}{\partial x_1}\right)0$ で partially microhyperbolic 故

基本解Eで、上のようなsupportを持つmicrofunctionに作用（non local）可能なものが存在する。（[7] Theorem 6.1.）

よって

$$u=(EP)u=E(Pu)=0$$

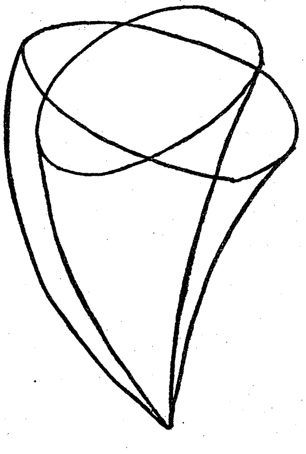
（証明終）

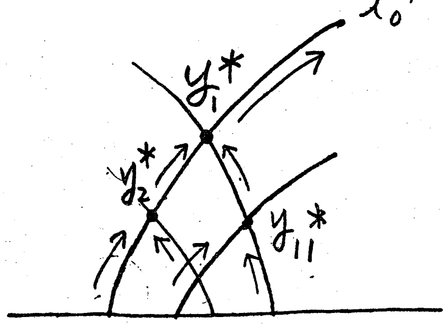
さて今の証明を見ると，接触変換して標準形に持っていった事は本質的ではない事がわかる。つまりれが一般であっても ii) または iii) の場合ならば，同様な補題が成立することは，殆んど確からしい。⊛

上記補題を使ってミクロ解析性がどこまで伝播するかを見てみよう。

簡単の為 $p(x,\xi)=(\xi_1^2-a\xi_2^2-b\xi_3^2)(\xi_1^2-c\xi_2^2-d\xi_3^2)$ としよう。ii) または iii) が成り立つとする。もちろんだがここで a, b, c, d は x の函数を表わしている。

特性錐は次の図のようになっているだろう。





さて，特性錐にはいらない点を x_0^* としよう。x_0^* は単一特性的な点としても以下の議論は十分である。x_0^* から出て，初期平面へ向かう bicharacteristic 上には単一特性ではない点があるだろう。この bicharacteristic 上初期平面に到達するまでの間に，それらは

⊛そうも言えない。数理研紀要の本論文を参照の事。

有限個しかない。一方 y_1^* からはもう一本別の bicharacteristic が出る。その上にも単一特性的でない点があるかもしれない。それを y_2^*, … とする。このようにして次々と現われる点 y^* たちが、ひとつも特性錐の上に載っていないなら x_0^* から出て枝分かれした bicharacteristic たちはどれもみないつかは $u=0$ なる点に到達するから翻って u は x_0^* で 0 になる。

逆に言えば、原点から出た特異性は bicharacteristic に沿って進み、S とぶつかる毎に枝分かれして進んでいくというわけである。(但し、必ずしもそのすべてに特異性が存在するわけではない。)

reductive でない場合及び i) の場合の扱い、さらに、基本解の満たす最大過剰決定系 などは次回に譲りたい。

文献

[1] 河合　超函数論における Fourier 変換の理論とその応用　数研講究録 108

[2] 河合　Construction of Local Elementary Solutions for Linear Partial Differential Operators with Real Analytic Coefficients (I)　Publ. R.I.M.S. Vol. 7, No. 2, 1971

[3] 浜田　The Singularities of the Solutions of the Cauchy Problem　Publ. R.I.M.S. Vol. 5, 1969

[4] Schapira-Bony Solutions hyperfonctions du problèmes de Cauchy
Lecture Notes in Math. 287 Springer

[5] 柏原 定数係数 C 双曲型作用素について
数研講究録 145

[6] 佐藤-河合-柏原 Hyperfunctions and pseudo-differential equations
Lecture Notes in Math. 287 Springer

[7] 河合-柏原 On micro-hyperbolic pseudo-differential operators I. (to appear)

[8] Atiyah-Bott-Gårding Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficient I,
Acta. Math. 124 1970

[9] Bernstein Modules over a ring of differential operators. Study of the fundamental solutions of equations with constant coefficient.
F.A. Vol. 5. No 2. 1971

[10] 浜田 On the propagation of singularities of the solution of Cauchy problem
Publ. R.I.M.S. Vol 6 1970