数理解析研究所講究録
第227巻 1975年 39-41

隠された境界条件

京大・数理研

柏原正樹, 河合隆裕

近時"単一特性"の仮定の下では過剰決定系迄こめて, 擬微分方程式の構造は(少くとも micro-local には)完全に明らかにされたと言ってもよい。そしてその構造を解明する際"浜田の定理"は指導原理として極めて有用であった。しかしながら"単一特性"という条件を落とすと, 事態は一転して極めて複雑な, 同時に解析的に興味ある現象が起きる。実際, "浜田の定理"は各 phase に沿っての特異性は相互に無縁である, 即ち, 一つの phase にのみ特異性を持つ解を任意に作れることをその系として主張するけれど, これは極めて例外的に幸運な事態であった。これが, たとえば Leray が Tricomi の作用素にあれ程執着し, 又, 浜田氏の仕事にショックを受けた理由であろう。実際, 彼は, 浜田氏の扱われた場合, モノドロミーが自明である点に最も興味を持ったように我々には思える。

今, 我々の直面する事態を図式的に記すなら次のように言えよう:

(単一特性の作用素):((Monvel-Treves, Sjöstrand の意味で)二重特性の作用素) = 巾函数:超幾何函数

即ち、単一特性の仮定を落せば、解の特異性は各 phase (がきれいに求まる場合でも)毎に相互に関係し、従って特異点のまわりでの解の接続により、解が必然的に(たとえば擬微分方程式による)関係式を満たす、という現象が起きる。この観点から単一特性でない作用素の解の構造を調べることは、興味ある approach の仕方であろう。少くとも、幾何学的には描像がはっきりととらえられるけれど、単一特性の枠には納まらぬ問題、たとえば回折波の現象や二重特性の作用素に対する可解性、正則性等の問題はこの観点から扱われるべきであると考える。以下その一、二の例を揚げよう。この方向の研究は現在未だ進行中の為故、全貌は次回に明らかとされよう。

1° Triconi の作用素 $D_1^2 - x_1 D_2^2$ について。

この方程式の解が、characteristic variety $\{\eta_1^2 - x_1\eta_2^2 = 0\}$ の内、$\eta_2 = -\sqrt{x_1}\,\eta_1$ にのみ台を持つ為には、$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = v_1(x_2)$ と $u|_{x_1=0} = v_0(x_2)$ の間には、$v_1 = \mathrm{const}^{(*)}\,|D_2|^{\frac{2}{3}}\,v_0$ なる関係が必要である。これに対し、$\overbrace{\left\{\frac{x_1^3}{9} \geq \frac{x_2^2}{4}\right\}}^{\text{特性錐}}$ に台を持つ基本解が存在することとの違いに注目されたい。

($(*) = 2^{-\frac{4}{3}}\,3^{-\frac{2}{3}}\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{\pi}{3}}$ で $\Gamma(-1/6)$)

2° 二重特性の作用素、即ち、その主要部が $p_1(x,\eta)\,p_2(x,\eta)$ 但し $\{p_1, p_2\} \neq 0$, $V = \{p_1 = p_1^c = 0\} = \{p_2 = p_2^c = 0\}$, なる作用

素に対し $\tau = \{p_1, p_2^c\}\{p_2, p_1^c\} / \{p_1, p_1^c\}\{p_2, p_2^c\}$ なる量を V^R 上で考える。ここで $\tau \geq 0$ なら、低階の項が generic であれば、P に対し、可解性、正則性が成立することはほぼ証明されている。（接触幾何の部分が残っている）この現象の一つの原因としてやはり上と同様の現象がある。たとえば、簡単な例として $(D_1^2 + x_1^2 D_2^2 + i\lambda D_2)u(x_1, x_2) = 0$ の $\{x_1 > 0\}$ で定義された解の $x_1 = 0$ への境界値を考えれば、λ が一般であれば（次の係数 $c(\lambda)$ が有限な値をとれば）$v_0(x_2) = u|_{x_1 \downarrow 0}$ と $v_1(x_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1 \downarrow 0}$ の間には、次の関係式が存在する。

$$D_2 v_0 = c(\lambda) v_1 \qquad \text{但し}$$

$$c(\lambda) = e^{\frac{\lambda}{4}\pi i}\left(\frac{1+\lambda}{2B\left(\frac{5+\lambda}{4}, \frac{1-\lambda}{4}\right)} - \frac{1-\lambda}{2B\left(\frac{5-\lambda}{4}, \frac{1-\lambda}{4}\right)} \right)$$

この関係式により、逆に $\{x_1 = 0\}$ 上での楕円型擬微分方程式の可解性を用いて、解の存在を得られる事等は見易いであろう。