数理解析研究所講究録
第 227 巻 1975 年 66-69

コホモロジー群の有限性と消滅

京大 数理研

河合隆裕

最近十年程の間に線型微分方程式系の一般理論において種々の"凸性"の概念が導入されてきた。大雑把に言って、それには領域に対する"凸性"と作用素に対する"凸性"に関する物がある。勿論、最も興味深いのはその両者が交叉する所である。この観点からすれば、擬凸性を接コーシー・リーマン系の立場から見るのは極めて自然である。その立場を一般の楕円複体に進めて得られたのが Guillemin [1], 河合 [1] 他のコホモロジー群の有限次元性の定理である。しかしながら、領域が滑らかな（C^ω 又は C^∞）境界を持つ、という仮定は応用上極めて不便である。実際、我々は、楕円型方程式系に関する結果は、むしろ、一般の方程式系に対する超函数解の存在定理への有用な手段と見たいからである。（小松[1]、河合[2]）―― その場合、どうしても"角のある領域"を扱わざるを得ない。――

本講演では、まず始めに有限性に関する定理を述べ、次に、領域を変形して消滅定理が得られる場合を考察する。函数論との類似を言うなら（一松[1]の用語を用いれば）Grauert 擬凸、即ち強擬凸領域の増大列の極限領域、を考察することになる。しかしながら、一般の楕円複体に対しては、岡-Weil領域

のように便利な集合が無いから，かなり理論はデリケートなものとならざるを得ない。我々は 柏原－河合 [1] により展開された境界値問題に関するコホモロジー群の同型定理を 双対複体に関して適用し，函数解析的手法を援用して結果を得る。この種の問題(註)には今の所 このような議論は避けられないようであるが，この方法では $\mathcal{C}$－解についての議論のできぬ恨みがある。たとえば 次の定理が証明されれば（その証明法は）今後の指針となろう。

◎ $\mathcal{M}$を定数係数（有限位数）擬微分方程式系とする。この時 Ωを $\mathbb{R}^n$内の凸開集合，Iを S^{n-1}内の任意の開集合として，

$$\mathrm{Ext}^j(\Omega\times\sqrt{-1}I;\mathcal{M},\mathcal{C})=0 \quad j\geqq 1.$$

尚，$\mathcal{M}$が線型，有限位数の微分方程式系の場合は（Ωが所謂完全$(n-k)$凸の時に $(k+1)$次以上のコホモロジーについての）同様の消滅定理は証明されている。（柏原－河合，in prep.）勿論，その結果は特に三輪 [1] による実解析解に対する存在定理の内，2次以上のコホモロジーに関する消滅定理を含むことは見易い。（完全$(n-k)$凸の場合に拡張した形で。）

(註) 特に，いわば "強擬凸" 以外の場合を扱う一般的方法は他に今の所殆んどない。

主要な定理は次の通り：

定理 1. Ω を M 内の相対コンパクトな開集合で滑らか (C^ω) な境界を持つ物とする。今 $\mathfrak{M}$ を M 上の線型楕円型微分方程式系で、その $\partial\Omega$ への誘導系の正部分 $\mathfrak{M}_+$ は $(q+1)$-凸又は $(q-1)$-凹とする。この時

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^q(\Omega; \mathfrak{M}, \mathcal{B}) < \infty$$

定理 2. $\mathfrak{M}$ を純(d)次元的楕円複体とする。今定理1と同様の仮定の下で

$$\mathrm{Ext}^q(\bar{\Omega}; \mathfrak{M}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^q(\Omega; \mathfrak{M}, \mathcal{B})$$

定理 3. $\Omega_t = \{x \in M;\ \varphi(x) < t\}$ として、各 Ω_t はすべて定理1と同じ条件を満たすとする。この時、$\mathfrak{M}$ は定理2と同様として

$$\mathrm{Ext}^q\Big(\bigcup_{t>0} \Omega_t; \mathfrak{M}, \mathcal{B}\Big) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Ext}^q(\Omega_t; \mathfrak{M}, \mathcal{B})$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^q(\Omega_t; \mathfrak{M}, \mathcal{B})$$ が $\Omega_t \neq \phi$ なる限り成立する。

特に Ω_t を（上の条件を満たしつつ）一点に縮めることができて、その近傍で、実解析函数に対する局所存在定理が成立するなら（この仮定は、コーシー・コヴァレフスキーの定理により、解析的には厳しい物ではない）上に現われるコホモロジー群の消滅が、グロタンディェックの LF-空間に関する定理を用いて証明できる。

文献

Guillemin, V.W. [1] Proc Nice Congress, II pp 227-230, 1971.

一松 [1] 多変数函数論, 培風館 1960

柏原-河合. [1] Proc. Japan Acad., 48 712-715 (1972)
and 49, 164-168 (1973)

河合 [1] J. Math. Kyoto Univ. 13 (秋月記念号) 73-95, (1973)

[2] Proc. Japan Acad. 49. 243-246, 654-657 and
to appear (1973)

小松 [1] Math. Ann. 176, 77-86 (1968)

三輪 [1] Proc. Japan Acad. 49, 500-502 (1973)