数理解析研究所講究録
第 227 巻 1975 年 109-120

二独立変数包合的偏微分方程式系の求積法 (Darbouxの方法の拡張)

立教大 理　垣江邦夫

§1. 序

二独立変数 x, y の函数 $z(x,y)$ に対し、$p_{i,k} = \partial^{i+k} z(x,y)/\partial x^i \partial y^k$ と書く。l 次迄の導函数の空間を J^l で表わす。J^l の点 $(x, y, z, p_{i,k};\ 1 \leqq i+k \leqq l)$ は、l-jet と言われる。議論は、実解析的又は複素解析的範疇において行われる。

$z(x,y)$ を未知函数とする m 階偏微分方程式系

$$(S_m) \qquad f_\alpha(x, y, z, \cdots, p_{i,k}, \cdots) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, q)$$

を考える。空間 J^m で、S_m の方程式達で定義される多様体を $\mathcal{V}(S_m)$ と記す。$\mathcal{V}(S_m)$ が空集合でない時、系 S_m は、compatible であると言う。我々は $\mathcal{V}(S_m)$ の simple point の近傍で考察を行う。方程式系 $f_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, \cdots, q)$ は正則、即ち、Pfaff 系 $df_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, \cdots, q)$ の $\mathcal{V}(S_m)$ 上の階数は、$\mathcal{V}(S_m)$ の余次元に等しいと仮定する。

系 S_m は、次の 1 次微分形式系へ移して考えることができる。

$$
(\Omega(S_m)) \begin{cases} f_\alpha = 0, \quad df_\alpha = 0 & (\alpha = 1, 2, \cdots, q), \\ dz - p_{1,0}\, dx - p_{0,1}\, dy = 0, \\ dp_{i,k} - p_{i+1,k}\, dx - p_{i,k+1}\, dy = 0 & (1 \leqq i+k < m). \end{cases}
$$

我々が考察するのは、S_mに対するCauchy問題である。この問題は次のように述べることができる。"任意に与えられた$\Omega(S_m)$の正則な(non-characteristic)積分曲線(初期曲線)に対し、それを通る$\Omega(S_m)$の積分曲面(2次元)を見出せ。"

この問題は、S_mが包合的であるならば、与えられた初期曲線に対し、一意的な解を持つ(Cartan-Kählerの第一存在定理)。我々が注意を向ける問題は次である。

<u>問題</u>. 包合系S_mのCauchy問題の解法が、常微分方程式系の積分に帰着される為の条件と方法を見出せ。

この種の問題は、Laplace, Monge, Ampère及びDarbouxによって研究された単独2階方程式の求積法に、その起源をもつ(cf. Goursat [8], Forsyth [7])。我々の主目的は、いわゆるDarbouxの方法を、包合系へ拡張することにある。我々は、E. Cartan ([1]−[5])によって創始された微分形式系の理論を適用することによってこれを行う。この立場に立った我々の考察は、古典的研究に比して、Darbouxの方法が成功する理由を、より本質的に示す。尚、単独高階方程式

に対するDarbouxの方法の拡張は Goursat ([8], §213) によって、古典的立場よりなされている。 最近、松田([12])によって得られた方程式 $s+f(x,y,z,p,q)=0$ に対する求積法(integrable system による解法)は、概念的に深化されてはいるが(Cauchy, Cartan の意味の characteristicsとしての把握)、Darboux の方法と同等である。

§2. 二独立変数包合的偏微分方程式系

1。 一般の包合的偏微分方程式系については、E. Cartan, 倉西, 松田 等 によるすぐれた研究がある(松田[11] 及びその文献参)。 ここでは系S_mに対し直接的に扱い包合的である為のより簡単な条件を、まず導く。

<u>定義</u>。 J^m 上の微分形式系 $\Omega(S_m)$ が、x, y に関し包合的である時、S_mは <u>包合的である</u> と言う。(倉西 [10], §3.13)

S_mが包合的であるとは、その解が、Cauchy-Kowalewskaya型の方程式系をいくつか(この場合、二つ、しかも、一つは常微分方程式系)解くことによって得られる時であると、大雑把に言うことができる。

S_mの方程式で階数が丁度mである方程式の全体をΔ_mと記す。

$$(\Delta_m) \qquad F_\alpha(x,y,z,\cdots,p_{i,k},\cdots)=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,r\leqq g)。$$

Δ_mの方程式を、x, y に関して 1 回全微分 して得られる方程式

系を、s_{m+1}と記す。

$$(s_{m+1}) \qquad \partial_x F_\alpha = 0, \quad \partial_y F_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, r).$$

（∂_x, ∂_yは、それぞれx, yに関する全微分を表わす。）

松田[11]に従って、S_mの方程式達をx, yに関して一回全微分して得られる方程式達から代数的に導かれる高々m階の方程式はすべてS_mの方程式達の代数的結論である時、S_mは<u>p-closed</u>であると言おう。次の定義をおく。

$$\mathrm{rank}\, s_m = \mathrm{rank}\, \partial(F_1, F_2, \cdots, F_r)/\partial(p_{m,0}, p_{m-1,1}, \cdots, p_{0,m}) \quad (\text{on } \mathcal{U}(S_m)),$$

$$\mathrm{rank}\, s_{m+1} = \mathrm{rank}\, \partial(\partial_x F_1, \partial_y F_1, \cdots, \partial_x F_r, \partial_y F_r)/\partial(p_{m+1,0}, \cdots, p_{0,m+1}) \quad (\text{on } \mathcal{U}(S_m)).$$

E. Cartan（[2], §§5-6, Kähler[9] pp54-55も参照）による包合的である為の判定法を用いて、次を証明することができる。

<u>定理I</u>。 compatibleな系S_mが包合的である為の必要且つ十分なる条件は、次の二条件である：(i) S_mはp-closedである。(ii) $\mathrm{rank}\, s_{m+1} = \mathrm{rank}\, s_m + 1$ 。

この定理の証明の系として、S_mが包合的である時$\Omega(S_m)$の1次のcharacterは、$m+1-\mathrm{rank}\, s_m$に等しく、2次のそれは0に等しいことが得られる。S_mの解を$\Omega(S_m)$の対応する積分多様体(2次元)を通してparametrizeすれば、Cartan-Kählerの第二存在定理（E. Cartan[5], Chap. IV, Kähler[10] p.55）によって次の命題を得る。“包合系S_mの一般解は、

$m+1-\mathrm{rank}\, s_m$ 個の一変数任意函数, $\mathrm{rank}\, s_m + \dim \mho(S_m) - m - 3$ 個の任意常数に依存する。" 尚, G. Cerf [6] によって考察された微分方程式系は, 我々の意味で包合的である。彼は別の観点より考察している。

2. n 階の方程式 $F=0$ の特性方程式は定義によって(Goursat [8], §209) 次である。

$$F^0 dy^n - F^1 dy^{n-1} dx + \cdots + (-1)^n F^n dx^n = 0, \quad F^i = \partial F / \partial p_{n-i,i}.$$

この左辺は, 特性多項式と言われる。J^n の $F(p^0)=0$ をみたす点 p^0 の (x,y)-空間への射影を (x^0, y^0) とする。$(dy, dx) = (\xi_1, \xi_0)$ が点 p^0 において $F=0$ の特性方程式の根である時, (x,y)-空間の点 (x^0, y^0) を通り $\xi_0 dy - \xi_1 dx = 0$ で定義される直線の方向は, $F=0$ の点 p^0 における特性方向と言われる。我々は, 系 S_m の点 $p^0 \in \mho(S_m)$ における特性方向を, S_m のすべての方程式の共通の特性方向として定義する。二変数同次多項式系に関するある種の結果を用いれば次を得る。

定理II. S_m は包合系と仮定する。この時, $\Omega(S_m)$ の 1 次の character は, S_m のすべての方程式の $\mho(S_m)$ の各点における特性多項式の最大共通因子の次数に等しい。

この定理は, 解析的直感により予想される次の命題の証明を与えている。"既述の parametrization によって, S_m の一般解に現われる一変数任意函数の個数は, S_m の $\mho(S_m)$ 上の各点

における特性方向の個数に等しい。” ここで、特性方向の個数は、それらの多重度も込めて数える。又、議論を実解析的範疇で行う時は、虚の特性方向も数えるものとする。

§3. Darboux の方法の拡張

以後、S_mは常に包合的と仮定し、$\Omega(S_m)$ の1次の character を簡単の為ηとかく；$\eta = m+1-\mathrm{rank}\, S_m$。

1. はじめに、系S_mの Monge の意味の特性系（M-特性系といおう）を定義する。我々は、E. Cartan ([5], Chap. IV) に従って、次の如く定義する。空間J^mの1次元接触要素が$\Omega(S_m)$の特異要素 (singular element) である為の条件を書き下せば、S_mの特性方向に対応するいくつかの1次微分形式系を得る。その各微分形式系が定義によってM-特性系であり、一般に、S_mはη個の相異なるM-特性系を持つ。以下、微分形式系および偏微分方程式系に対し定義された Cartan の (total) prolongation を p で表わす。$\Omega(S_m)$がx, yに関し包合的だから、Cartan ([2], §9), Matsushima ([13]) の定理によって $p^{n-m}\Omega(S_m)$も又x, yに関し包合的である。S_mの$n(\geqq m)$次のM-特性系は、空間J^nの1次元接触要素が、$p^{n-m}\Omega(S_m)$の特異要素である為の条件を書下すことによって得られるS_mの特性方向に対応する1次微分形式系として定義される。$dy-\lambda\, dx=0$によって

定義される特性方向に対応する n 次の M-特性系を $C^n(\lambda)$ と記す。以上の定義は、単独方程式の場合、古典的な定義と同等である(cf. Goursat [8])。

<u>定義</u>. n-jets の函数 u が M-特性系 $C^n(\lambda)$ の<u>積分</u>であるとは、$du \equiv 0 \pmod{C^n(\lambda)}$ である時を言う。又、u が $C^n(\lambda)$ の<u>相対積分</u>であるとは、$du \not\equiv 0 \pmod{u}$ であって、$du \equiv 0 \pmod{(C^n(\lambda), u\cdot)}$ の時を言う。u が真に n 階の<u>導函数</u>を含む函数である時、u の次数は n であるという。

容易にわかるように、n-jets の函数が、$C^n(\lambda)$ の積分ならば $C^{n+1}(\lambda)$ の積分であり、又、n-jets の函数が $C^{n+1}(\lambda)$ の積分ならば、$C^n(\lambda)$ の積分である。従って、M-特性系の次数を忘れて考えることができる。次数を指定しない $dy - \lambda dx = 0$ で定義される特性方向に対応する M-特性系を $C(\lambda)$ と記す。

2. 次の問題を考える。"包合系 S_m にひとつ又はいくつかの方程式を付加して新しい包合系を作れ。" $u_1 = 0, \cdots, u_h = 0$ を h 個のそれぞれ m_1 階, $\cdots$, m_h 階の方程式とする。S_m とこれらから、次の n 階偏微分方程式系を作ることができる、$n \geq M = \max\{m_i ; 1 \leq i \leq h\}$。

$$(S_n(u_1, \cdots, u_h)) \begin{cases} & \partial_x^i \partial_y^k u_1 = 0 \quad (0 \leq i+k \leq n-m_1), \\ p^{n-m} S_m, & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \partial_x^i \partial_y^k u_h = 0 \quad (0 \leq i+k \leq n-m_h). \end{cases}$$

ここで、各方程式$u_i=0$は、$du_i \not\equiv 0 \pmod{u_i}$をみたすとした。

定義. $n(\geqq m)$階の方程式 $u=0$が系S_mと独立であるとは、$u=0$が$p^{n-m}S_m$の方程式達の結果として$n-1$階以下の方程式に帰さすことができず、且つ$du \not\equiv 0 \pmod{u}$である時を言う。

上に提起した問題に対する解答は、次の二つの定理によって与えられる。

定理III. uをn-jets$(n\geqq m)$の函数で、方程式$u=0$がS_mと独立であるような函数とする。この時、$S_n(u)$が包合的である為の必要十分条件は、uがS_mのあるM特性系のn次の相対積分であることである。

uが$C(\lambda)$の相対積分であるならば、系$S_n(u)$の$V(S_n(u))$上の各点における特性方向達は、その点のJ^mへの射影におけるS_mの特性方向達から、$dy-\lambda dx=0$で定義される特性方向の多重度を1つ減ずることによって得られる。

定理IV. $C(\lambda_1),\cdots,C(\lambda_h)$を$h$個の相異なる$S_m$のM特性系とせよ。$u_1,\cdots,u_h$をそれぞれ$C(\lambda_1)$の$m_1$次の相対積分,…,$C(\lambda_h)$の$m_h$次の相対積分とせよ$(m_1,\cdots,m_h\geqq m)$。もし各$u_i=0$が$S_m$と独立であるならば、系$S_M(u_1,\cdots,u_h)$は包合的である。ここに$M=\max\{m_i\,;\,1\leqq i\leqq h\}$。

この時、$S_M(u_1,\cdots,u_h)$の$V(S_M(u_1,\cdots,u_h))$の各点における特性

方向の個数は、S_m の $\mathcal{V}(S_m)$ 上の点における それよりも、丁度 k 個だけ少ない；前者の特性方向は後者の特性方向から $dy-\lambda_1 dx=0, \cdots, dy-\lambda_k dx=0$ で定義される特性方向の多重度をそれぞれ一つ減らして得られる。（§2の最後尾の注意参照）。

3. Darboux の方法及び我々が行おうとしているその拡張に於て、次の本質的には E. Cartan による定理は基本的な役割を演じる。

<u>定理V</u>（E. Cartan）. 包合系 S_m が、$\mathcal{V}(S_m)$ 上の各点に於て丁度一つの特性方向を有するならば（即ち $\eta=1$）、微分形式系 $\Omega(S_m)$ の Cartan の意味の特性系の階数は $\dim J^m - 1$ である；即ち $\Omega(S_m)$ は Cauchy の意味の特性曲線を持つ。この $\Omega(S_m)$ の特性系は、S_m の（唯一の特性方向に対応する）M特性系によって与えられる。

4. 包合系 S_m に対する Darboux の方法の拡張である求積法を述べよう。考えるべきは、序において述べた問題である。これを考えるにあたり、次の三つの場合に分ける。

1°) $\eta=0$：この時、S_m は完全積分可能であり、$\mathcal{V}(S_m)$ の任意の与えられた点を通って、S_m の解が唯一つ存在する。

2°) $\eta=1$：S_m に対する Cauchy 問題の解法は、常微分方程式系の積分に帰着させることができる。これは定理Vの結論である。与えられた初期曲線の点を通る Cauchy の意味

の特性曲線で生成される曲面は，良く知られた定理によって $\Omega(S_m)$ の積分曲面となる。即ち Cauchy 問題は，空間 J^m 上の階数が $\dim J^m - 1$ の(M)特性系（これは常微分方程式系と同等）を積分することによって解かれる。

3°) $n>1$：この場合，一般には，S_m の Cauchy 問題の解法は，常微分方程式系の積分に帰着させることはできない。しかし，ある種の包合系に対して，我々は Darboux の方法の拡張である求積法を得る。実際次が成り立つ。

"包合系 S_m は，$n-1$ 個の相異なる M-特性系を持つとする。$n-1$ 個の相異なる M-特性系が，それぞれ S_m と独立な二つの独立な積分を持つならば，S_m に対する Cauchy 問題の解法は常微分方程式系の積分に帰着させることができる。"

与えられた初期曲線 $\mathcal{J}(\subset J^m)$ に対して，各 M-特性系の積分が二つあることから，$\mathcal{J}$ 又はこれを自然に延長した曲線，（即ち，それは，$p^{n-m}\Omega(S_m)$ の積分曲線であるように J^n 内の曲線に延長したものである）を積分曲線として持ち，且つ S_m を含む，上の 2° で論じた型の包合的偏微分方程式系を作ることができる。2° によって，この系に対する Cauchy 問題は常微分方程式系を積分することによって解かれる。従って上の言明" "が成り立つ。

文　献

[1] E. Cartan : Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales, Ann. Sci. École Norm. Sup., 3^e série, 18 (1901), 241–311.

[2] —— : Sur le structure des groupes infinis de transformation, Ann. Sci. École Norm. Sup., 3^e série, 21 (1904), 153–206.

[3] —— : Les systèmes de Pfaff a cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre. Ann. Sci. École Norm. Sup., 3^e série, 27 (1910), 109–192.

[4] —— : Leçons sur les invariants intégraux. Hermann, Paris (1922).

[5] —— : Les systèmes différentielles extérieurs et leurs applications géométriques. Hermann, Paris (1945).

[6] G. Cerf : Sur les transformations des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque a deux variables indépendentes. J. de Math. 7^e série, 4 (1918), 309–412.

[7] A. R. Forsyth : Theory of differential equations, part IV, vol VI. Cambrige Univ. Press, London (1906).

[8] E. Goursat : Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendentes, Tom II. Hermann, Paris (1898).

[9] E. Kähler : Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. Teubner, ~~Leibzig~~ (1934).

[10] M. Kuranishi : Lectures on exterior differential systems. Tata Inst. Fund. Res., Bombay (1962).

[11] M. Matsuda : Involutiveな偏微分方程式系について. 数学, 21 (1969), 161—177.

[12] ——— : Monge-Ampère方程式について 数学, 24 (1972), 100—118.

[13] Y. Matsushima : On a theorem concerning the prolongation of a differential system. Nagoya Math. J. 6 (1953), 1—16 .