数理解析研究所講究録
第230巻 1975年 26-29

代数体の判別式と分岐定数

早大 理工　　小松 建三

「代数体」とは有限次代数体を意味するものとする。

K/k を相対代数体とする．すなわち K, k が共に代数体で $K \supset k$ となっているとする．$\bar{K}$ をその Galois closure とする．すなわち $\bar{K}$ は K をふくむような k の Galois 拡大体の中で最小のものであり，具体的には K の k 上の共役体全体の合成体である。G を $\bar{K}/k$ の Galois 群，H を $\bar{K}/K$ の Galois 群とする．

$\mathfrak{p}$ を k の素イデアルとして，それを K および $\bar{K}$ で素イデアル分解する．

K において：　$\mathfrak{p} = P_1^{e_1} P_2^{e_2} \cdots P_s^{e_s}$,　$N_{K/k}(P_i) = \mathfrak{p}^{f_i}$.

但し $N_{K/k}$ はノルムを表わす．

$\bar{K}$ において：　$\mathfrak{p} = (\bar{P} \cdots)^E$,　$N_{\bar{K}/k}(\bar{P}) = \mathfrak{p}^F$.

すなわち $e_1, e_2, \ldots, e_s; E$ が分岐指数で，$f_1, f_2, \cdots, f_s; F$ が相対次数である．$\mathfrak{p}$ でわりきれる素数を p とする．今 $\mathfrak{p}$ をわる

$\bar{K}$の素イデアル$\bar{P}$を一つ固定して，その$\bar{K}/k$に関する分解群，惰性群および第i分岐群（$i \geqq 0$）をそれぞれZ，T，$V(i)$であらわす．$T = V(0)$である．また$V = V(1)$とおく．

さてK/kにおけるe_i，f_iや相対判別式の$\mathfrak{p}$指数などは上記の群を使ってかきあらわすことができる（Dedekind－Hilbert）が，実際にGalois体を構成する場合，e_i，f_i，相対判別式の$\mathfrak{p}$指数などはわかっているのに，Z，T，$V(i)$などはすぐにはわからないという逆の現象がよく出てくる．例えばK/kの定義方程式が与えられた場合などにそういう問題がおこる事がある．そこでe_i，f_iなどK/kに関してはよくわかっているものとして，そのとき$\bar{K}/k$に関してはどうなるかという問題を考えてみることにする．これに関して従来知られていた結果の中では，次に述べる定理(I)が重要であり，いろいろな応用をもっている．

K/kの拡大次数をnとする．$K = k(\alpha)$なる$\alpha \in K$をとり，そのk上の共役を

$$\alpha^{(1)} = \alpha,\ \alpha^{(2)},\ \ldots,\ \alpha^{(n)}$$

とする．Galois群Gはこれらの要素の置換群であり，したがって，

$$N=\{1,2,\cdots,n\}$$

の上の置換群である．Hは $1^h=1$ なる $h\in G$ の全体となる．

Uを G の任意の部分群とするとき，Nにおいて

$$\exists u\in U,\quad i^u=j$$

なる関係 $R(i,j)$ は同値関係である．この関係によるNの同値類をUに対する(Nの)可遷領域とよぶことにする．このとき次の定理が成立する．

(I)(Dedekind－van der Waerden) Nは Z に対して，それぞれ $e_1f_1,\ e_2f_2,\ \cdots,\ e_sf_s$ 個の要素からなる可遷領域に分割される．さらにそれらの領域は T に対しては e_i 個の要素からなる f_i 個の可遷領域に細分される．

この定理から次の(II)，(III)がえられる（(I)を使わずに直接証明することもできる）．

(II) $e_1=e_2=\cdots=e_s=1$ ならば，Fは $f_1,f_2,\cdots,f_s$ の最小公倍数に等しい．

(III) $e_1,\cdots,e_s$ がいずれも p と素ならば，Eは $e_1,e_2,\cdots,e_s$ の最小公倍数に等しい．

a を $e_1,e_2,\cdots,e_s$ の最小公倍数，b を $f_1,f_2,\cdots,f_s$ の最小公倍数とすると，Eが a でわりきれること，Fが b でわりきれる

ことは一般に成立する．しかし $E=a$, $F=f$ はいつでも成立するとは限らない．上記Ⅲの場合の F の決定については Wegner の研究がある．

講演者は，Speiser の理論（1919）を用いて次の事を証明した．くわしい内容についてはいずれ発表される予定である．

（Ⅳ）$\mathfrak{P}$ の分岐定数がちょうど一つだけ存在するとする．すなわち

$$V(1)=V(2)=\cdots=V(u_1)\neq 1\,,\quad V(u_1+1)=1$$

となっているとする．このとき，この分岐定数 u_1 の値は p, $e_1, e_2, \cdots, e_s$, $f_1, f_2, \cdots, f_s$ の値および K/k の相対判別式の $\mathfrak{p}$ 指数の値によって具体的にかきあらわすことができる．

講演では特に $p>\frac{n}{2}$ の場合（このときは分岐定数は高々1個存在する）について述べ，さらに n が素数の場合への応用を述べた．これらについても，くわしい内容はいずれ発表される予定である．