

岩沢 inv. λ の零化について

奈良女大理 赤川安正

l を素数とし, $\zeta_n = \exp(2\pi i/l^n)$; $n = 1, 2, \dots$
とおく. 体の代数拡大 K/F は $K \subset F(\zeta_\infty) = F(\zeta_n$
 $| n = 1, 2, \dots)$ のとき l -cyclotomic 拡大と呼び, 特に
 K/F が局所体の有限次代数拡大であって $\forall \zeta_n \in F \Rightarrow$
 $\zeta_n \in N_{K/F} K^\times$ がみたされるとき, K/F は (有限次)
 Γ' -拡大という. いくつかの有限次 Γ' -拡大 $/F$ の合併体
を Γ' -拡大という. 有限次代数体 F に対して, F_∞/F は
(unique な) l -cyclotomic \mathbb{Z}_l -拡大, F_i/F は次数が l^i
の F_∞/F の部分拡大体とする.

$$\begin{cases} F_{\text{cylt}}/F = \text{局所 } l\text{-cyclotomic な極大アーベル } l\text{-拡大} \\ F_{\Gamma'}/F = \text{ " } \Gamma' \text{ " " " "} \end{cases}$$

と書きあらわすこととし, $F_{\infty \text{cylt}} = \bigcup_n F_{n \text{cylt}}$, $F_{\infty \Gamma'} =$
 $\bigcup_n F_{n \Gamma'}$ とおく.

注意 1 $(p, l) = 1$ のとき, 局所体 F_p につい

では, l -cyclotomic 拡大, Γ' -拡大, 不分岐拡大, は同じものである.

注意2 局所アーベル l -拡大 K_p/F_p が Γ' -拡大であるとは, K_p/F_p を含む F_p の多重 \mathbb{Z}_l -拡大が存在することと同値である. $p = l \mid l$ のとき, F_l の極大アーベル Γ' - l -拡大は $[F_l : \mathbb{Q}_l] + 1$ 重 \mathbb{Z}_l -拡大である.

注意3 素イデアル (l) が F_∞/\mathbb{Q} で分解せず, また F_n/\mathbb{Q} ($\forall n \geq 1$) で (l) の素因子が常に主因子であるとき (例えば F/\mathbb{Q} が l -cyclotomic のとき), $F_{cylt} = (\text{極大不分岐アーベル } l\text{-拡大}/F) \cup F_\infty$ であり また $F_{p'}$ は (l) の素因子以外はすべて不分岐な F のアーベル l -拡大にはかならない.

以下 $F \not\subseteq G_1$, $k = F(G_1) = F(G_{v_0}) \subsetneq F(G_{v_0+1})$ とする ($v_0 \geq 1$). $\Lambda = \mathbb{Z}_l[[T]]$ を l -進整数環 \mathbb{Z}_l 上の中級数環とし, 可換群 $X = G(F_{\infty, cylt}/F_\infty)$, $Y = G(F_{\infty, p'}/F_\infty)$ を Λ -加群とみなすことにする. ただし $G(k_\infty/k)$ の元 $\gamma_0 : G_n \mapsto G_n^{1+l^{v_0}}$ ($\forall n \geq 1$) によって惹き起される $G(kF_{\infty, cylt}/F)$ の内部自己同型で X の元の $(1+T)$ -倍を定義し, Y についても同様である. $\lambda = \dim_{\mathbb{Q}_l} X \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ が, X の岩沢 $\text{inv.} \lambda$ である.

$F_{n \text{ cft}}/F_n$ や $F_{n p.}/F_n$ の部分拡大のガロワ群にも, 上記の二ことから自然に Λ が作用していると考えられる. さて, m, n を

$$(1) \quad \begin{cases} v_0 \geq m \geq v_0/2 \geq n \\ 2(n + v_0 - m) \leq m \end{cases}$$

をみたす自然数とし

$$\begin{aligned} \Omega &= k_{p.}^{G(k_{p.}/k)^{l^{v_0+2n}}} \\ & (= k_{p.} \text{ の部分体で } G(k_{p.}/k)^{l^{v_0+2n}} \text{ に対応 (ガロワ対応で) するもの) \end{aligned}$$

とおく.

定理 1 $v_0 \geq 2$ と仮定する. 条件 (1) の外に, 次の条件をみたす様な l^m -次の $F_{n \text{ cft}}/F$ に含まれる巡回拡大 K/F が存在するとする:

$$(2) \quad K \cap F_1 = F$$

$$(3) \quad \begin{cases} F_{p.}/F \text{ の巡回部分拡大 } K_1/F \text{ で, } K_1 \supset K \text{ かつ} \\ G(K_1/k/k) \text{ が } G(\Omega/k) \text{ の直積因子になっているものが存在する.} \end{cases}$$

いま, 二つの同型 $G(KF_n/F) \cong G(K/F) \times G(F_n/F)$ (projections によって定まる自然同型) と $G(K/F) \cong \Lambda/(l^m, T)$ を固定しておく. このとき, $F_{n \text{ cft}}/F$ に

は KF_n を含む部分ガロワ l -拡大 L/F が存在して

$$G(L/F) \cong (\Lambda / (l^m, l^n T, T^2)) \cdot G(F_n/F)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$G(KF_n/F) \cong (\Lambda / (l^m, T)) \times G(F_n/F)$$

が可換になる。(ただし, 上右の群は半直積であり, 二つの縦字像は自然なもの)

この定理の証明には, “「埋蔵問題の作る群」の上での剰余の相互法則” を必要とする [1].

$(1+T)^{l^i} - 1 = \omega_i \in \Lambda$; $i \geq 0$, $\mathbb{Z}_l[[\omega_i]] = \Lambda_i \subset \Lambda$ とおく. 特に $\omega_0 = T$, $\Lambda_0 = \Lambda$ である. X はそのまま Λ_i -加群ともみなせる. 一方 $l^{e_0} \cong \text{Tor } X = \{x \in X \mid nx = 0 \text{ for some } n \neq 0 \in \mathbb{Z}\}$ の exponent とする: $l^{e_0} \text{Tor } X = 0$. X は有限生成なので $0 \leq e_0 < \infty$. このとき, 次の Lemma が得られる.

Lemma 十分大きな $n_0 \geq 0$ があって, 任意の Λ_i -準同型 $X \rightarrow \Lambda_i / (l^{e_0+1}, \omega_i^2)$ は $i \geq n_0$ のとき決して surjective でない.

従って, 十分大きな i をとって定理 1 の F を F_i でおき

かえる (従って v_0 を $v_0 + i$ でおきかえる) とき, F_i 上には定理 1 の K/F が存在しない. このことから次の定理 2 が得られる. ここで勿論 $\text{Tor}_\wedge Y = \{y \in Y \mid f(T)y = 0 \text{ for some } f(T) \in \Lambda\}$.

定理 2 $F \ni G_1$ とする. このとき

$$\lambda(G(F_{\infty \text{cyl}}^{\text{Tor}_\wedge Y} / F_\infty)) = 0$$

であり, また

$$F_{\infty \text{cyl}}^{(\text{Tor}_\wedge X + lX)} \subset F_{\infty p_1}^{\text{Tor}_\wedge Y}$$

いま $F_{\infty \text{unram}} / F_\infty$ を極大不分岐アーベル l -拡大とすると (従って $F_{\infty \text{unram}} \supset F_{\infty \text{cyl}}$), 特に F が総実のときには $Y = \text{Tor}_\wedge Y$, $[F_{\infty \text{unram}} : F_{\infty \text{cyl}}] < \infty$ なので ([2]), 次の定理も得られる.

定理 3 F が総実のとき

$$\lambda(G(F_{\infty \text{unram}} / F_\infty)) = 0.$$

なお, 定理のくわしい証明は, *Crelle Journal* に発表の予定である.

参考文献

- [1] Y. Akaiyama : A power-residue-symbol on the module of embedding problem and a reciprocity law, to appear in Ann. of Math.
- [2] " : On a relation between Galois groups of some two maximal abelian extensions over an algebraic number field with given local conditions, *ibid.*
- [3] K. Iwasawa : On the theory of cyclotomic field, Ann. of Math. 70 (1959) 530-561
- [4] " : On \mathbb{Z}_ℓ -extensions of algebraic number fields, Ann. of Math. 98 (1973) 246-326
- [5] H. S. Vandiver : Fermat's last theorem and the second factor in the cyclotomic class number, Bull. Am. Math. Soc. 40 No 2 (1934) 118-126