数理解析研究所講究録
第 233 巻 1975 年 9-13

The Schur subgroup and Schur index

都立大 理　　山田俊彦

kは標数0の体，Gは有限群とする．Gのk上の群環kGは半単純である：

$$kG = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_s .$$

我々は各単純成分A_iを Schur 多元環とよぶ．χをGの絶対既約指標とすると，$\chi(A_i) \neq 0$なる単純成分A_iが唯一つ存在する．この単純成分A_iの index はχのk上の Schur index $m_k(\chi)$である．A_iの中心は指標の体$k(\chi)$で，$[A_i : k(\chi)] = \chi(1)^2$．$A_i$はある多元体$D$上の行列環：$A_i = M_t(D)$，ここで $t = \chi(1)/m_k(\chi)$．したがってもしDがわかればA_iは完全に決定されることになる．

ところでDはある既約kG-加群Mの準同型環である：$D = \mathrm{End}_{kG}(M)$．しかるに既約kG-加群Mを決定する algorithm は一般にはなにもない．したがって多元体Dを決定する algorithm はなにもないのではないかと思われるかもしれない．しかしながら1950年代の初めに，Brauer と Witt によ

り，A_i は G の乗法表と χ により effective に決定されることが確定した．たとえばもし k が代数体ならば，$k(\chi)$ の各素点 $\mathfrak{p}$ に対して Hasse invariant $\mathrm{inv}_{\mathfrak{p}}(A_i)$ が実際に計算可能というわけである．

詳しくいうと，彼等はこの問題を G の hyperelementary subgroups に対するそれに帰着させた．そしてそれはさらに円分多元環に対する問題にまで簡単化された．ここで円分多元環とは，

$$(\beta, K(\zeta)/K), \quad \beta(\sigma,\tau) \in \langle \zeta \rangle, \quad (K \supset k(\chi))$$

なる形の crossed product である．これらの結果は Brauer-Witt の定理とよばれている．この定理の内容はかなり複雑で，彼等の証明はたいへん難解であった．しかしながら多くの人の努力により，証明はいちじるしく簡易化された．今や我々は，Brauer-Witt の定理の完全な形とその証明を，筆者の講義ノート [1] の中に見出すことができる．

さて k 上の Brauer 群 $Br(k)$ の Schur 部分群 $S(k)$ は，k 上の正規単純多元環でかつ Schur 多元環であるようなものを含む多元環類の全体として定義される．ところで Brauer-Witt の定理の系として，Schur 部分群 $S(k)$ は k 上の円分多元環を含む多元環類の全体であることが分る．したがって Schur 部分群の研究は，円分多元環の研究に帰着された．

kがp進体Q_pの有限次拡大のとき，Schur部分群$S(k)$は筆者により完全に決定された．kは円体と仮定してよいことがわかる．ζを1の巾根とし，$Q_p(\zeta)\supset k$とするとき，$Q_p(\zeta)/k$のinertia groupの構造により$S(k)$が決定されるのである．詳細は以下の通り：

(I) $p\neq 2$とする．$Q_p(\zeta)$はkとζ_pを含む円分体，eを$Q_p(\zeta)/k$の分岐指数，$e=e_0e'$，$(e_0, p)=1$，$e'=p$巾とする．そのとき$S(k)$は$Br(k)$の位数e_0の唯1つの部分群である．

(II) $p=2$とする．$Q_2(\zeta)$はkとζ_4を含む円分体，$Q_2(\zeta)$に含まれる最大の2巾根をζ_{2^n}とする．もし$Q_2(\zeta)/k$のGalois群が$\iota(\zeta_{2^n})=\zeta_{2^n}^{-1}$なるautomorphism ιを含めば，$S(k)$は$Br(k)$の位数2の唯一つのsubgroupである．その他の場合は$S(k)=1$.

たとえばQが有理数体，Gが2-groupのとき，Gのすべての既約指標χに対し$m_Q(\chi)=1$ or 2であり，もし$Q(\chi)$が実でなければ$m_Q(\chi)=1$であることなどは，(II)から直ちに分る．

また筆者はp進円分多元環のHasse不変数に対する非常に有用な公式をえた．実際その公式を用いることにより，我々はkが代数体のときのSchur部分群$S(k)$を研究することができる．いくつかの円体kに対して$S(k)$は決定されている．

筆者はまた cohomology 的な議論により，一般に複雑な Galois 群をもつ円分多元環が簡単な Galois 群をもつ円分多元環と相似であることを示した．すなわちおおざっぱにいって次のことがなりたつ：

$$(\beta,\ k(\zeta_n)/k) \sim (\alpha,\ k(\zeta_{p_1\cdots p_t})/k), \qquad n = p_1^{a_1}\cdots p_t^{a_t}.$$

この結果は最近 Janusz により強められた．すなわちおおざっぱにいって次のとおり：

$$(\alpha,\ k(\zeta_{p_1\cdots p_t})/k) \sim \prod_i (\alpha_i,\ k(\zeta_{p_i})/k).$$

k が代数体のときの $S(k)$ の研究は，現在多くの人により進行中であるが，かなり整数論的であるので省略する．

最後に次の結果を述べてこの小文を終えることにしよう：

定理 (Fein-Yamada). G を有限群，χ を G の既約指標，$m = m_Q(\chi)$ とする．そのとき m は G の exponent $\exp(G)$ を割り，m^2 は G の位数を割る．さらに

(i) もし $2^r | m$ ならば，$2^{r+1} | \exp(G)$；

(ii) もし $p^r | m$ かつ G の Sylow p-subgroup が abelian ならば，$p^{r+1} | \exp(G)$.

Brauer-Witt の定理を用いることにより，最初の主張は比較的容易にえられる．主張 (i), (ii) の証明は少し難しい．そしてそれらはかなり有用で，たとえば次の諸結果が直ちにえられる．

系. すべての p に対して G の p-Sylow 群が elementary abelian であれば, G の任意の既約指標 χ に対して $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = 1$.

位数 175,560 の Janko 群 J_a は, そのすべての p-Sylow 群が elementary abelian だから, J_a の任意の既約指標 χ に対して $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = 1$.

また $G = \langle a \rangle \cdot P$ が素数 p における hyperelementary group で, G の p-Sylow 群 P が elementary abelian ならば, G のすべての既約指標に対してその $\mathbb{Q}$ 上の Schur index は 1 である.

文献

[1] T. Yamada, The Schur subgroup of the Brauer group, Lecture Notes in Math. Vol. 397, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.