数理解析研究所講究録
第 233 巻 1975 年 32-34

グラフと有限群

M. Aschbacher

阪大・理　沼田稔（訳）

Aschbacherは有限群の研究に使われえるグラフ論的方法について講演した。Aschbacherから送られてきたpreprintをもとに簡単に内容を紹介します。

このグラフ論的方法は、四元数群を2シロー群としてもつtightly embeddedな部分群を含む群（もっと一般的に、トンプソンのいうclassical involutionをもった群）を分類するための仕事の中で使われます。

ここで言うグラフとはループや多重弧や方向を考えないグラフですが群からグラフを作る方法が述べられています。それは、群の元又は部分群をグラフの点と考え、群の演算で可換となる時、対応するグラフの点を結ぶことによってグラフを作ります。

まず初めに、すべてのinvolutionから作ったグラフがdisconnectedであることと、群がstrongly embedded subgroupをもつことが同値であることに示しています。

しかしながら、すべての *involution* についての情報をうることはもちろん、一つの共役なクラスについても困難である場合が多い。したがってもっと一般的な場合についての情報をうることが必要である。　不幸にもこれは非常に難しい問題ですが、可換な元の積についての十分な条件をもつならば情報をうることは出来る。

この結果は *classical involution* の問題に典型的である。グラフが *disconnected* である場合についての議論として、*Component type* の群についてのある定理、*B-conjecture*、交代群や *Bender type* の *standard component* をもった群の分類が出来ると予想している。

次に、多くの場面で非常に有効な *B. Fischer* の *Lemma* が紹介されています。　*B. Fischer's Lemma* は次のようなものです。群を生成する部分群のある共役類から作られるグラフを考え、ある点と結ばれる点の集合の上に、それらの点から生成される群を作用させ *orbit* に分けた時異なる *orbit* に含まれる点は互いに結ばれるならば、長さが最大なある *orbit* に含まれるすべての点と結ばれる点の全体は、群の作用のもとで *imprimitive set* となる。

このLemmaから言えることは、こうして作られたimprimitive set全体について、その結合関係が代表元の取り方によらずに定まり、imprimitive setを点と考えた新しいグラフの上に群を自然に作用させることが出来る。さらに前に述べた長さ最大のorbitに含まれる点から生成される群とこのorbitについてもこのLemmaの条件をみたしinductionによってこの群について情報をつかむことが可能である。

群から作られたグラフについての多くの情報をもとにグラフと、その自己同型群を決定し、それに含まれているもとの群を決定する。このprocessをclassical involutionの問題を考えることによって描きだしています。

ここでは次の四つの場合について考えています。

I　Symplectic 又は unitary type

II　直交 type

III　unimodular type

IV　exceptional type