

二円柱の運動

京大理 木田 重雄

1. はじめに

非圧縮粘性流体の高レイノルズ数における乱れの場は、ほとんどのいたるところポテンシヤル流で、その中に多数の渦管が不規則に存在するものとみることができ。一般の三次元流れでは、これらの渦管は、伸びたり縮んだり、曲がったり、非常に複雑な運動をする。一方、二次元流れでは、それらは互いに平行に並び、運動はそれらに垂直方向だけに限られる。特に無限大レイノルズ数の極限においては、渦管は太さのない渦糸となり、その二次元運動は、ハミルトンの正準方程式で厳密に記述される。しかしながら、大きいけれども有限のレイノルズ数というより現実的な場合には、渦管は有限の太さをもつが、これが渦糸の運動に決定的な影響を与えるかどうかは、まだ知られていない。ここでは、この影響を調べるために、二個の渦管の運動を考える。その際、渦管の芯

と円柱で置き換えて取扱う。これは二つの渦管の芯が、その相対距離に比べて、充分小さい限りはよい近似であるように思われる。ところで、渦管の芯の円形からのずれが、この運動に影響を及ぼす可能性はあるが、この問題はここでは取扱わない。

2. 円柱にはたらく力

非圧縮非粘性流体中の一つの円柱にはたらく力は、次のように計算される。

円柱の軸に垂直に (x, y) 平面をとる。円柱の外の流れが非回転であるとすれば、速度成分 (u, v) は、速度ポテンシヤル $\Phi(x, y, t)$ 、流れ関数 $\Psi(x, y, t)$ を用いて、

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (2.1)$$

あるいは、複素速度ポテンシヤル $W(z, t) = \Phi + i\Psi$ 、 $z = x + iy$ を用いて、

$$\frac{\partial W}{\partial z} = u - iv \quad (2.2)$$

と表わされる。圧力 p は、一般化したベルヌーイの定理を使って、

$$\left. \begin{aligned} p &= p \left[F(t) - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 \right], \\ q &= \sqrt{u^2 + v^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

のように得られる。ここに、 ρ は流体の密度、 $F(t)$ は t の任意関数である。

円柱の単位長さ当りにはたらく力 (X, Y) は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = - \oint p \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} ds \quad (2.4)$$

である。ただし、 (l, m) は、円柱の表面に垂直な外方向ベクトルの方向余弦、 ds は、円柱の表面に沿った線素である。この式を、複素表示すると

$$X - iY = -i \oint p dz^* \quad (2.5)$$

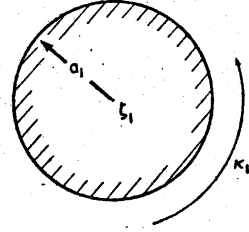
となる。(2.2), (2.3) と (2.5) に代入して、

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint \left[\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w^*}{\partial t} \right] dz^* \quad (2.6)$$

と得る。

3. 円柱の運動方程式

さて、半径 a_1 、循環 $2\pi k_1$ の円柱と、循環 $2\pi k_2$ の渦糸による二次元流れを考へよう。この円柱の中心と渦糸の複素座標をそれぞれ ζ_1 、 ζ_2 とすると、複素ポテンシャル W は、



$$W = -\frac{a_1^2 \dot{\zeta}_1}{z - \zeta_1} - i k_1 \ln(z - \zeta_1)$$

$$-i k_2 \left\{ \ln(z - \zeta_1) + \ln(z - \zeta_2) - \ln\left(z - \zeta_1 + \frac{a_1^2}{\zeta_1^* - \zeta_2^*}\right) \right\}$$

(3.1)

となる。ただし、点・は時間微分を表わす。

円柱にはたらく力は (3.1) を (2.6) に代入し、留数定理を用いることによつて次のように得られる。

$$X - iY = \pi \rho \left\{ -2i k_1 \dot{\zeta}_1^* - a_1^2 \dot{\zeta}_1^* + \frac{2k_1 k_2}{\zeta_1 - \zeta_2} - \frac{2i k_2 a_1^2 \dot{\zeta}_2}{(\zeta_1 - \zeta_2)^2} - \frac{2k_2^2 a_1^2}{(\zeta_1 - \zeta_2)(|\zeta_1 - \zeta_2|^2 - a_1^2)} \right\} \quad (3.2)$$

ところで、円柱の運動方程式は、

$$p\pi a_1^2 \ddot{\zeta}_1 = X + iY \quad (3.3)$$

であるが、(3.2) を代入すると、

$$a_1^2 \ddot{\zeta}_1 = i\kappa_1 \dot{\zeta}_1 + \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\zeta_1^* - \zeta_2^*} + \frac{i\kappa_2 a_1^2 \dot{\zeta}_2^*}{(\zeta_1^* - \zeta_2^*)^2} - \frac{\kappa_2^2 a_1^2}{(\zeta_1^* - \zeta_2^*)(|\zeta_1 - \zeta_2|^2 - a_1^2)} \quad (3.4)$$

のようになる。

(3.4) の項の中で、左辺及び右辺の第3、第4項は円柱の半径 a_1 を含んでいる。 a_1 を零に近づけた極限では、(3.4) は、

$$\dot{\zeta}_1 = \frac{i\kappa_2}{\zeta_1^* - \zeta_2^*} \quad (3.5)$$

となるが、これは、当然予想されたことであるが、 $\dot{\zeta}_1$ のところに置かれた渦糸に対する Biot-Savart の法則にはかならない。さらに、(3.4) より、円柱の運動は渦糸との相対距離 $\zeta_1 - \zeta_2$ だけではなく、渦糸の速度 $\dot{\zeta}_2$ にも依存することが分る。

4. 二個円柱の運動

次に、二個の回転する円柱の運動を調べてみよう。

これらの円柱の半径, 循環, 中心の複素座標をそれぞれ a_1 , $2\pi k_1$, ζ_1 及び, a_2 , $2\pi k_2$, ζ_2 とする。もし, 半径 a_1 , a_2 がどちらも円柱間距離に比べて充分小さければ, 一方の円柱の回りに他方の円柱によって誘起される流れを, 後者の円柱の中心に置かれた同じ循環をもつ渦糸による流れで近似することができる。この近似のもとで, 円柱の運動方程式は (3.4) を使って,

$$a_1^2 \ddot{\zeta}_1 = ik_1 \dot{\zeta}_1 + \frac{k_1 k_2}{\zeta_1^* - \zeta_2^*} + \frac{ik_2 a_1^2 \dot{\zeta}_2^*}{(\zeta_1^* - \zeta_2^*)^2} - \frac{k_2^2 a_1^2}{(\zeta_1^* - \zeta_2^*)(1|\zeta_1 - \zeta_2|^2 - a_1^2)} \quad (4.1)$$

$$a_2^2 \ddot{\zeta}_2 = ik_2 \dot{\zeta}_2 - \frac{k_1 k_2}{\zeta_1^* - \zeta_2^*} + \frac{ik_1 a_2^2 \dot{\zeta}_1^*}{(\zeta_1^* - \zeta_2^*)^2} + \frac{k_1^2 a_2^2}{(\zeta_1^* - \zeta_2^*)(1|\zeta_1 - \zeta_2|^2 - a_2^2)} \quad (4.2)$$

のように表わされる。これらの方程式の右辺第1項, 第2項は, a_1, a_2 が零への極限でも消えず, 二個の渦糸の運動を記述する。その他の項はすべて a_1^2, a_2^2 を含んでおり, 円柱の有限半径の効果を表わしている。以下では, これらの方程式も, 二個の同一半径の円柱で, その循環が, 同じ向きで同じ大きさ, 反対向きで同じ大きさという二つの特別な場合に

ついて解いてみる。

4.1. $a_1 = a_2 = a$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ の場合.

二つの円柱が同一の半径, 同一の循環をもつときは, (4.1), (4.2) から,

$$a^2 \ddot{\phi} = i\kappa \dot{\phi} + \frac{i\kappa a^2}{\psi^{*2}} \dot{\phi}^* \quad (4.3)$$

$$a^2 \ddot{\psi} = i\kappa \dot{\psi} + \frac{2\kappa^2}{\psi^*} - \frac{i\kappa a^2}{\psi^{*2}} \dot{\psi}^* - \frac{2\kappa^2 a^2}{\psi^*(141^2 - a^2)} \quad (4.4)$$

が得られる。ここに, $\phi = \zeta_1 + \zeta_2$, $\psi = \zeta_1 - \zeta_2$ である。(4.3), (4.4) は, 二個円柱の重心運動, 相対運動をそれぞれ表わしている。

(4.4) は ψ だけしか含んでいないから, 独立に解くことができる。 r , θ を実数として,

$$\psi = r e^{i\theta} \quad (4.5)$$

とおけば, (4.4) は, 二つの実の方程式に分離される。

$$a^2(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\kappa r \dot{\theta} + \frac{2\kappa^2}{r} - \frac{\kappa a^2 \dot{\theta}}{r} - \frac{2\kappa^2 a^2}{r(r^2 - a^2)} \quad (4.6)$$

$$a^2(2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta}r) = \kappa \dot{r} - \frac{\kappa a^2}{r^2} \dot{r} \quad (4.7)$$

a が零の極限では, 上の方程式は, すぐ積分できて,

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0 = \text{const}, \\ \theta &= \frac{2\kappa}{r_0^2} t \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

となる。この極限においては、(4.3) から、重心の位置 \mathbf{r} は時間的に不変であることが分る。この結果は、よく知られた同一の強さの二個の渦糸の運動と一致している。

a が零でない一般の場合には、(4.7) は、

$$\dot{\theta} = \frac{\kappa}{2a^2} - \frac{\kappa}{r^2} \ln r + \frac{\kappa A}{r^2} \quad (4.9)$$

のように積分される。ここで、 A は積分定数である。(4.9)

を(4.6)に代入して積分すれば、

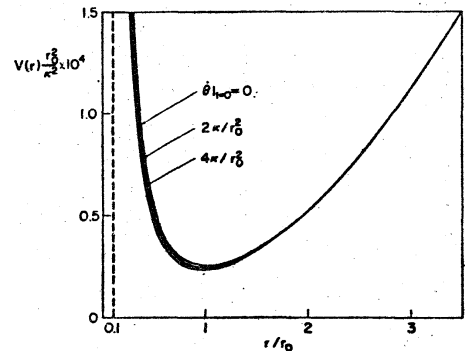
$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{r}^2 + V(r) &= \text{const}, \\ V(r) &= \kappa^2 \left\{ \frac{r^2}{8a^4} + \frac{\ln r}{r^2} + \frac{1}{2r^2} + \frac{(\ln r)^2}{2r^2} + \frac{A^2}{2r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a^2} \ln \frac{r^2 - a^2}{r^2} - \frac{3}{2a^2} \ln r - A \left(\frac{\ln r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right) \right\} \end{aligned} \right\}$$

が得られる。

(4.10)

(4.10) は、ポテンシャル $V(r)$ の中で運動する単位の質量をもつ粒子のエネルギー方程式と同じである。

右図に示されている $V(r)$ の形から、距離 r は、初期条件によって決定される平衡点の回りを振動することが分子。



一般の運動は、少し計算が、複雑であるから、ここでは、

a/r が小さい場合を詳しく調べておく。(4.8) で記述される運動もしていた円柱が、 $t=0$ で、微小擾乱を受けたとすれば、初期条件は、

$$r=r_0, \quad \dot{r} = \alpha \frac{\kappa}{r_0}, \quad \theta=0, \quad \dot{\theta} = \frac{2\kappa}{r_0^2} (1+\beta) \quad (4.11)$$

と書ける。ただし、 $|\alpha|, |\beta| \ll 1$ である。このとき、 $(a/r_0)^2$ の高次の項を無視するという近似で (4.9), (4.10), (4.3) と解くと、

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0 \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 \sin \frac{\kappa}{a^2} t \right\} \\ \theta &= \frac{2\kappa}{r_0^2} (1+\beta) t + \alpha \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 \left(1 - \cos \frac{\kappa}{a^2} t \right) \\ \phi &= \phi_0 + \frac{ca^2}{\kappa} \dot{\phi}_0 \left(1 - e^{-\kappa t/a^2} \right) \end{aligned} \right\} (4.12)$$

が得られる。添字 0 は初期値を示す。

同一の半径, 同一の循環をもつ二個円柱の運動は, (4.12) で完全に表わされる。もし, 重心が, 初期に静止しておれば, 以後いつまでも静止している。そして各円柱は, その静止した重心を中心とする波状の円に沿って運動する。重心の初速度 $\dot{\phi}_0$ が零でない一般の場合には, 重心は半径 $a^2/\kappa |\dot{\phi}_0|$ の小さな円に沿って運ぶ, 各円柱の運動は, 重心の円運動と, その重心の周りの波状の円運動との重ね合わせとして, 表わされる。

また(4.12)によって記述される円柱の運動は, 半径 a が零になる極限においては, (4.8)によって与えられる二個の渦系の運動に一致する。

4.2. $a_1 = a_2 = a, \quad \kappa_1 = -\kappa_2 = \kappa$ の場合

二つの円柱が同じ半径, 同じ大きさで方向が反対の循環をもつときは, (4.1), (4.2) は,

$$a^2 \ddot{\phi} = i\kappa \dot{\psi} + \frac{i\kappa a^2}{\psi^{*2}} \dot{\psi}^* \quad (4.13)$$

$$a^2 \ddot{\psi} = i\kappa \dot{\phi} + \frac{2\kappa^2}{\psi^*} - \frac{i\kappa a^2}{\psi^{*2}} \dot{\phi}^* - \frac{2\kappa^2 a^2}{\psi^*(141^2 - a^2)} \quad (4.14)$$

となる。この場合は, 重心の運動と, 相対運動は, 互いにかみあっている。しかしながら, a が零の極限では, これらの方程式は分離し, 積分できて

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_0, \\ \phi &= \phi_0 - \frac{2i\kappa t}{\psi_0^*} \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

が得られる。(4.15)は、強さ κ 、 $-\kappa$ の二つの渦系の周知の運動を表わしている。

a が零でない一般の場合には、(4.13)が積分できて、

$$a^2 \dot{\phi} = i\kappa \psi - \frac{i\kappa a^2}{\psi^*} + A \quad (4.16)$$

となる。ここに、 A は積分定数である。(4.16)を(4.14)に代入すると、 ψ に対する閉じた方程式が得られる。

$$\begin{aligned} a^2 \ddot{\psi} &= -\frac{\kappa^2}{a^2} \psi - \frac{2\kappa^2}{\psi^*} + \frac{i\kappa A}{a^2} - \frac{i\kappa A^*}{\psi^{*2}} \\ &+ \frac{\kappa^2 a^2}{\psi^* |\psi|^2} - \frac{2\kappa^2 a^2}{\psi^* (|\psi|^2 - a^2)}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

前節と同様に、(4.15)で記述されている二個の円柱が、 $t=0$ で、微小撓乱を受けたとしよう。このとき、初期条件は、

$$\psi = \psi_0, \quad \dot{\psi} = \alpha \frac{2\kappa}{\psi_0^*}, \quad \phi = 0, \quad \dot{\phi} = -\frac{2i\kappa}{\psi_0^*} (1 + \beta) \quad (4.18)$$

となる。ただし $|\alpha|, |\beta| \ll 1$ である。

(4.16), (4.17)の解は $(a/r_0)^2$ の高次の項を無視した近似で,

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 \left(1 + 2\alpha \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 \sin \frac{\kappa}{a^2} t \right) \\ \phi &= -\frac{2i\kappa}{\psi_0^*} \left\{ (1+\beta)t + \alpha \frac{a^2}{\kappa} \left(\cos \frac{\kappa}{a^2} t - 1 \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

と求められる。重心の運動は、二つの円柱を結ぶ直線に垂直な直線に沿っての運動と、振幅 $2|\alpha|a^2/r_0$ 、振動数 κ/a^2 の振動運動との重ね合わせである。一方、相対運動の方も、初期条件によって与えられた方向で振動運動を行なう。

半径 a が零の極限では、これらの振動運動はなくなり、(4.19)の運動は、(4.15)で与えられる反対方向の循環をもつ二個の渦系の運動になる。

5. まとめ

二個の回転する円柱の運動を、その半径が相対距離に比べてずっと小さい場合について調べた。その運動は、ある平均運動とその回りの小さな振動運動とから成り立っていることが示された。前者は、その二個の円柱と同じ循環をもつ渦系の運動であり、後者は円柱の有限の大きさによるものである。後者の運動が単に前者の運動の回りの振動運動であることは、

二個の円柱の運動は、半径零の極限である二個の渦系の運動と本質的に異ならないことを示している。

[文献]

- 1) L. Onsager: *Nuove Cimento Suppl.*
6 (1949) 279.