数理解析研究所講究録
第 235 巻 1975 年 75-87

可換環上のある Galois object について

岡山大 理　　中島 惇

§1. 序.

ここでは，[1] において定義された可換環上の Galois object をある条件のもとで構成し，さらに Galois object の Frobenius 性について考える（定理 2, 5）.

以下 R は単位元をもつ可換環，$\otimes = \otimes_R$ ，H を Hopf R-algebra とし，その comultiplication を Δ，counit を ε で表わすことにする．　また Hopf algebra 等に関する記号は Sweedler [6] に従うものとする．

はじめにここで使われる定義について述べる．

定義 1.　S を R-algebra とする．　S が left H-module algebra であるとは，S が left H-module であり，次の条件を満足するときをいう．

(i)　$h(xy) = \sum_{(h)} (h_{(1)}x)(h_{(2)}y)$,　$(h \in H;\ x, y \in S)$.

(ii) $h \cdot 1 = \varepsilon(h) \cdot 1$.

定義2. SをR-algebraとする. Sがright H-comodule algebraとは, R-algebra homomorphism α: $S \longrightarrow S \otimes H$で次の条件をみたすものが存在するときをいう.

(i) $(\alpha \otimes 1)\alpha = (1 \otimes \Delta)\alpha$.

(ii) $(1 \otimes \varepsilon)\alpha = 1$.

SがGalois H-objectであるとは, Sがright H-comodule algebraであり, さらに

(iii) Sはfaithfully flat R-module.

(iv) $S \otimes S \ni x \otimes y \xmapsto{\gamma} (x \otimes 1)\alpha(y) \in S \otimes H$がR-algebra isomorphismであるときをいう。

Hをf.g. projective R-moduleかつantipode λをもつとしよう(このようなHopf R-algebraをfinite Hopf R-algebraと呼ぶことにする). このときR-module Sに対して次の自然な同型がある.

$Hom_R(S, S \otimes H^*) \cong Hom_R(S, Hom_R(H, S)) \cong Hom_R(H \otimes S, S)$

ただし $H^* = Hom_R(H, R)$とする. この同型により次のことは容易にわかる.

S: right H^*-comodule algebra, $\alpha(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} \in S \otimes H^*$

$\Longrightarrow S$: left H-module algebra, $\quad h\cdot x = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes h x_{(0)}$

$(x \in S,\ h \in H)$.

S : left H-module algebra

$\Longrightarrow S$: right H^*-comodule algebra, $\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i x \otimes h_i^*$,

ここに$\{h_i, h_i^*\}_{i=1}^{n}$はHのR-projective coordinate system とする．

以下において，right H^*-comodule algebraをleft H-module algebraとみる場合，又は逆にleft H-module algebraをright H^*-comodule algebraとみる場合は上記の見方で考えるものとする．

定義3. Galois H^*-object Sがleft H-moduleとしてHと同型であるとき，SをGalois H-algebraという．

§2. Galois H-objectの構成.

$H \otimes H$はcomultiplication Δによってleft H-moduleであるから，left H-module algebra Sに対して$F(S) = \mathrm{Hom}_H(H \otimes H, S)$とおき，$[(h_1 \otimes h_2)f](x \otimes y) = f(xh_1 \otimes yh_2)$ $(x, y, h_i \in H,\ f \in F(S))$とおけば，$F(S)$はleft $H \otimes H$-moduleとなる．さらに

$$\varphi : S \otimes S \longrightarrow F(S)$$

を　$\varphi(x\otimes y)(h_1\otimes h_2)=(h_1x)(h_2y)$　$(x,\ y\in S,\ h_i\in H)$ とすれば，φ は $H\otimes H$-module homomorphism である．

補題1．　H を finite Hopf R-algebra，S を faithfully flat R-module とする．　このとき次は同値である．

(i)　S は Galois H^*-object である．

(ii)　S は上で定義した φ が同型を与えるような H-module algebra である．

証明．　S を H-module algebra とし次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
S\otimes S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & F(S) \arrow[d, "\psi"] \\
S\otimes H^* \arrow[r, "\delta"'] & \mathrm{Hom}_R(H,S)
\end{tikzcd}$$

ここで　$\gamma(x\otimes y)=\sum_{i=1}^{n} x(h_i y)\otimes h_i^*$，　$\psi(f)(h)=f(1\otimes h)$，$\delta(s\otimes h^*)(h)=h^*(h)s$　$(x,\ y,\ s\in S,\ f\in F(S),\ h\in H,\ h^*\in H^*,\ \{h_i, h_i^*\}_{i=1}^{n}$ は H の R-projective coordinate system$)$．このときこの図式は可換であり，δ は isomorphism である．　さらに　$\psi':\mathrm{Hom}_R(H,S)\longrightarrow F(S)$　を　$\psi'(g)(h\otimes h')=\sum_{(h)} h_{(1)}g(\lambda(h_{(2)})h')$　$(g\in \mathrm{Hom}_R(H,S),\ h,\ h'\in H)$ とすれば ψ' は ψ の逆写像である．従って φ が isomorphism であること

と γ が isomorphism であることとは同値．よって前に注意した right H^*-comodule と left H-module の見方から，補題は成立する．

さて Hopf R-algebra H に対して次のような条件を考える．

(F) H は finite, commutative, cocommutative Hopf algebra であり，${}_H H \cong {}_H H^*$ が成立する． ここで H^* の H-module structure は $(hf)(x) = f(\lambda(h)x)$ $(h, x \in H, f \in H^*)$ で考える．

S を Galois H-algebra とすれば，${}_H S \cong {}_H H \cong {}_H H^*$ より H-module isomorphism $\eta : S^* = \mathrm{Hom}_R(S, R) \longrightarrow H$ が存在する． 従って次の H-module homomorphism を得る:

$$D : H \xrightarrow{\eta^{-1}} S^* \xrightarrow{\mu^*} (S \otimes S)^* \cong S^* \otimes S^* \xrightarrow{\eta \otimes \eta} H \otimes H$$

(μ は S の multiplication である)． μ の associativity から，D は coassociative，すなわち，$(D \otimes 1)D = (1 \otimes D)D$ である． そこで $H(D) = H^*$ (R-module として) とおくと，$H(D)$ は次の演算によって algebra となる．

$$(f\cdot g)(x) = (f\otimes g)\Delta(x)D(1) \qquad (f, g \in H(D),\ x \in H).$$

さらに次が成立する.

定理2.　Hは条件(F)を満足するものとする.　Sが Galois H-algebra ならば, Galois H^*-object として $S \cong H(D)$ である.

証明.　Dの定義から, 次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd} S^* \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d, "\eta"'] & (S\otimes S)^* \cong S^*\otimes S^* \arrow[d, "\eta\otimes\eta"] \\ H \arrow[r, "D"'] & H\otimes H \end{tikzcd}$$

従って $\eta^* D^* = \mu(\eta^*\otimes\eta^*)$.　$H(D)$の乗法はDによってきまり, ηはH-module isomorphism だから, $\eta^*: H(D)$
Sは H-module isomorphism かつ R-algebra isomorphism である.　よって定理は証明された.

定理2ではHを finite, commutative, cocommutative Hopf R-algebra とし, ${}_HH \cong {}_HH^*$ のもとで, Galois H-algebra を構成した.　そこで ${}_HH \cong {}_HH^*$ なる Hopf algebra について考えてみる.　Larson-Sweedler [3] によって (一般的には Endo [2], Pareigis [5]) 次のことが知られて

いる．

H を finite Hopf R-algebra とすると，left H-module として $H^* \cong H \otimes P$，　P は projective rank 1 の R-module．従って $\mathrm{Pic}(R) = 0$ ならば，left H-module として $H^* \cong H$ である．　同様にして ${}_{H^*}H^* \cong {}_{H^*}H$（ここで $H \cong H^{**}$ とみて H^*-module structure を入れる）．　$\mathrm{Pic}(R) \neq 0$ であっても次のような具体的な例がある．

(1)　G を有限アーベル群，RG をその group ring とする．　このとき RG は自然な構造で，finite，commutative，co-commutative Hopf R-algebra となる．　さらに RG-module として $(RG)^* \cong RG$ である．

(2)　R を $GF(p)$ ($p \neq 0$，素数) 上の algebra とし $H = Rd_0 \oplus Rd_1 \oplus \cdots \oplus Rd_{p-1}$，$\{d_0 = 1, d_1, \cdots, d_{p-1}\}$ は R-free basis，とおく．　H は次の演算によって finite，commutative，co-commutative Hopf R-algebra である．

$$d_i d_j = \binom{i+j}{i} d_{i+j} ,$$

$$\Delta(d_n) = \sum_{i=0}^{n} d_i \otimes d_{n-i} ,$$

$$\varepsilon(d_i) = \delta_{i,0} ,$$

$$\lambda(d_i) = (-1)^i d_i .$$

d_i^* を d_i の dual basis とするとき，$H^* = Rd_0^* \oplus Rd_1^* \oplus \cdots \oplus Rd_{p-1}^*$ は finite，commutative，co-commutative Hopf R-algebra

である． $f=\sum_{i=1}^{p-1} d_k^*$ とおくと，f は H^* の H-module としての free basis になる． 実際 $h_i=\sum_{j=1}^{p-1} r_{ij} d_j$ $(r_{ij}\in R)$ とおき，$h_i f = d_i^*$ となる h_i を求めることができればよいが，これは r_{ij} についての連立方程式とみたとき，その係数の行列式が $GF(p)$ の non-zero element であることよりわかる． 従って ${}_H H \cong {}_H H^*$ である．

上で与えられた Hopf R-algebra について，その Galois object は

(1) の場合． S が commutative Galois $(RG)^*$-object.

$\Longleftrightarrow$ S は Galois group G をもつ R のガロア拡大.

(Chase-Sweedler [1]).

(2) の場合． S が commutative H-algebra.

$\Longleftrightarrow$ $S \cong R[X]/(X^p-a)$ $(a\in R)$.

証明． H-module として $\psi : H \longrightarrow S$ なる isomorphism があるから，$\psi(1)=x\in S$ とおくと，$\{x, d_1(x), \cdots, d_{p-1}(x)\}$ は S の free basis であり，$d_{p-1}(x)$ は R の unit element である． これより $d_1(y)=1$ となる $y\in S$ が存在する． このとき $\{1, y, \cdots, y^{p-1}\}$ で生成される S の R-subalgebra を T とすると，$\{1, y, \cdots, y^{p-1}\}$ は R-free basis で，T は Galois H^*-object である． 従って $S=T\cong R[X]/(X^p-y^p)$

$(y^p \in R)$.

§3. Galois object の Frobenius 性.

§2において考えた例においては，${}_{H^*}H^* \cong {}_{H^*}H$ も成立している．H が antipode をもてば，H^* も antipode をもち，従って H^* は Galois H^*-object となる．このことより Galois H^*-object が R のどんな拡大であるかを調べるには "H^* が R のどんな拡大であるか？" ということが一つの目安になるものと思われる．例えば

H を finite cocommutative Hopf R-algebra，S を commutative Galois H^*-object とする．このとき H^* が separable R-algebra であれば，S は separable R-algebra である．一般に Galois object が separable R-algebra であっても，それは必ずしもガロア拡大ではない．

例．G を位数 n の有限群，n が R の unit element であるとする．このとき group ring RG は separable R-algebra であるが，R のガロア拡大にならないことがある．

H を finite cocommutative Hopf R-algebra，S を commutative R-algebra とする．S が left H-module ならば，S と H の smash product $S\#H$ が定義される，

すなわち，R-moduleとして $S\# H = S\otimes H$（$S\# H$の元を $s\# h$とかくことにする.），$S\# H$における積を

$$(x\# g)(y\# h) = \sum_{(g)} x(g_{(1)}y)\# g_{(2)}h \quad (x, y\in S;\ g, h\in H)$$

と定義すれば，$S\# H$ は R-algebra である．またSは $(s\# h)(x) = s(hx)$ $(s, x\in S;\ h\in H)$ によって left $S\# H$-module である．

定理3 (Chase-Sweedler [1]).　Hを finite cocommutative Hopf R-algebra，Sを commutative R-algebra とする．このとき次は同値である．

(i)　Sは Galois H^*-object である．

(ii)　Sは left H-module algebra であり

$$S\# H \ni s\# h \xrightarrow{\ \tilde{\gamma}\ } (x\mapsto s(hx))\in \mathrm{Hom}_R(S, S)$$

が R-algebra isomorphism である．

定理4.　Sは commutative R-algebra で，R-module として f.g. projective faithful であるとする．このとき次は同値である．

(i)　SはRの Frobenius 拡大である．

(ii)　$S^* = \mathrm{Hom}_R(S, R)$ は free S-module である．

(iii)　$\mathrm{Hom}_R(S, S)$ は free $S\otimes S$-module である．ここ

で $Hom_R(S, S)$ の $S\otimes S$-module structure は次のものとする. $[(s\otimes t)\varphi](x) = s(\varphi(xt))$ $(s, t, x \in S,\ \varphi \in Hom_R(S, S))$.

証明. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) は Frobenius 拡大の定義から自明. (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) を示す. $(s\otimes t)(x\otimes f) = sx\otimes tf$ $(s, t, x \in S,\ f\in S^*,\ (tf)(x) = f(xt))$ によって $S\otimes S^*$ は $S\otimes S$-module であり, $S\otimes S$-module として $Hom_R(S, S) \cong S\otimes S^*$ である. これより (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) を得る.

さて, H を finite cocommutative Hopf R-algebra, S を commutative R-algebra とする. H^* は commutative R-algebra であるから, H^* は (H^*の乗法によって) H^*-module である. 従って $H^{**} \cong H$ は H^*-module である. その構造は次で与えられている.

$$(f\cdot h)(g) = h(f\cdot g) = (f\otimes g)\Delta(h) \qquad (h\in H;\ f, g \in H^*).$$

よって $S\otimes H$ は $S\otimes H^*$-module である. S を left H-module algebra とすると, 前に注意したことから, S は right H^*-comodule algebra であり, 従って次の algebra homomorphism がある.

$$\gamma : S\otimes S \ni s\otimes t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} s(h_i t)\otimes h_i^* \in S\otimes H^* \qquad (s, t \in S)$$

ただし $\{h_i, h_i^*\}_{i=1}^{n}$ は H の R-projective coordinate system.

この γ によって $S\otimes H$ は $S\otimes S$-module となる. さらに H

の H^*-module structure から，$h^*h = \sum_{(h)} h^*(h_{(1)})h_{(2)}$ ($h^* \in H^*$, $h \in H$) となること及び，S が commutative R-algebra かつ H-module algebra であることに注意すれば

$$\gamma : S \otimes H \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(S, S)$$

は $S \otimes S$-module homomorphism である．これらのことより次の定理を得る．

定理5．S を commutative R-algebra，H を finite, cocommutative Hopf R-algebra で，${}_{H^*}H \cong {}_{H^*}H^*$ であるとする．このとき S が Galois H^*-object ならば，S は R の Frobenius 拡大である．

証明．S を Galois H^*-object とすれば，定理3から $\gamma : S \otimes H \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(S, S)$ は isomorphism である．仮定 ${}_{H^*}H \cong {}_{H^*}H^*$ より $S \otimes H^*$-module として $S \otimes H \cong S \otimes H^*$．さらに R-algebra として $S \otimes S \cong S \otimes H^*$ であり，$S \otimes H$ の $S \otimes S$-module structure はこの同型によって定められているから，$S \otimes H \cong \mathrm{Hom}_R(S, S)$ は free $S \otimes S$-module である．よって定理3から S は R の Frobenius 拡大である．

この証明は Yokogawa [7] における方法と同様である．

References

[1] S. U. Chase and M. E. Sweedler; Hopf algebras and Galois theory, Springer Lecture Notes 97, 1969.

[2] S. Endo; Hopf algebra の構造について, 数理解析研究所講究録94, "Derivations 及び Algebra の Cohomology 研究会報告集(1970), 76-92.

[3] R. G. Larson and M. E. Sweedler; An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras, Amer. J. Math. 91 (1969), 75-94.

[4] A. Nakajima; On generalized Harrison cohomology and Galois object, Okayama Math. J. to appear.

[5] B. Pareigis; When Hopf algebras are Frobenius algebras, J. Alg. 18(1971), 588-596.

[6] M. E. Sweedler; Hopf algebras, Benjamin, New York, 1969.

[7] K. Yokogawa; On $S \ {}_R S$-module structures of S/R-Azumaya algebras, to appear.