数理解析研究所講究録
第 241 巻 1975 年 108-118

有限要素解析における類似性

CRC 武田 洋

1. まえがき

構造工学の分野において誕生した有限要素法は，今日では日常の応力解析のための有効な方法として用いられており，このためのコンピュータ・プログラムも数多く開発されている。さらに，熱伝導解析，浸透流解析，流体解析などのような非構造工学の分野への応用も行なわれており，種々の問題への挑戦が試みられている。また，偏微分方程式に対する数値解法という立場から，数学的問題の解明も進められている。一方，工学や物理学においては，古くから"類似性(analogy)"が論じられており，この類似性により異分野間の現象が関連づけられいる。例えば，物理学における電気－音響－機械類似，電気－流体類似，弾性学における石けん膜類似などが有名である。ここでは，構造工学における有限要素解析の立場から，偏微分方程式の有限要素解析を考察し，楕円型，放物型および双曲型偏微分方程式に対して，等価な

構造モデルを明らかにする。

2. 楕円型および放物型偏微分方程式に対する類似性

非定常伝熱問題などの支配方程式である時間に関する1階の偏微分を含んだ放物型偏微分方程式は次のとおりである。

$$\frac{\partial}{\partial X_I}\left(a_{IJ}\frac{\partial \phi}{\partial X_J}\right) - c\frac{\partial \phi}{\partial t} + q = 0\ ;\ a_{IJ} = a_{JI}\ ,\ \underset{\sim}{X} \in R^3 \qquad (1)$$

ここでは総和規約に従うものとし，ϕは未知関数，a_{IJ}, c, qは既知関数であり，tは時間である。一般に式(1)には次の2種類の境界条件が課せられる。

$$\text{(i)}\quad \phi = \phi_b \qquad : \quad \underset{\sim}{X} \in \partial_1 R \qquad (2)$$

$$\text{(ii)}\quad a_{IJ}\frac{\partial \phi}{\partial X_I} l_J + p + b\,(\phi - \phi_0) = 0\ ,\quad \underset{\sim}{X} \in \partial_2 R \qquad (3)$$

ここでϕ_bは境界$\partial_1 R$上で規定される値，l_Jは境界$\partial_2 R$上での外向き法線ベクトルの方向余弦，bは境界$\partial_2 R$上での既知関数である。

2.1 有限要素に関する定式

式(1),(3)に対する有限要素式は次のようになる。

$$\left(h_{\gamma\delta} + h^{(b)}_{\gamma\delta}\right)\phi_\delta + c_{\gamma\delta}\,\dot{\phi}_\delta = q_\gamma + q_\gamma^{(b)} \qquad (4)$$

ここでγ, δは有限要素を構成する節点を表わし，式(4)にお

けるマトリックスは次のとおりである。

$$k_{\gamma\delta} = \int_v \frac{\partial \psi_\gamma}{\partial X_I} a_{IJ} \frac{\partial \psi_\delta}{\partial X_J} dv \qquad (5)$$

$$k_{\gamma\delta}^{(b)} = \int_{\partial_2 R} b\psi_\gamma \psi_\delta ds \qquad (6)$$

$$c_{\gamma\delta} = \int_v c\psi_\gamma \psi_\delta ds \qquad (7)$$

$$q_\gamma = \int_v q\psi_\gamma dv \qquad (8)$$

$$q_\gamma^{(b)} = \int_{\partial_2 R} (b\phi_0 - p)\psi_\gamma ds \qquad (9)$$

ここで ψ_γ は補間関数；$\phi = \phi_\gamma \psi_\gamma$ である。

2.2 構造問題との類似性

一般に構造解析のための有限要素式は次のとおりである。

$$m_{\gamma\delta} \ddot{\rho}_{\delta i} + c_{\gamma i \delta j} \dot{\rho}_{\delta j} + k_{\gamma i \delta j} \rho_{\delta j} = P_{\gamma i} \qquad (10)$$

ここで $m_{\gamma\delta}$ は質量マトリックス，$c_{\gamma i \delta j}$ は減衰マトリックス，$k_{\gamma i \delta j}$ は剛性マトリックスであり，$\rho_{\delta j}$ は有限要素節点 δ における j 方向変位であり，・は時間微分であり，$P_{\gamma i}$ は等価節点力である。 式(10)におけるマトリックスは次式によって表わされる。

$$m_{\gamma\delta} = \int_v \mu\, \psi_\gamma \psi_\delta \, dv \qquad (11)$$

$$k_{\gamma i \delta j} = \int_v \frac{\partial \psi_\gamma}{\partial x_\ell}\, E_{i\ell jm} \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x_m}\, dv \qquad (12)$$

$$c_{\gamma i \delta j} = \alpha\, \delta_{ij}\, m_{\gamma\delta} + \beta\, k_{\gamma i \delta j} \qquad (13)$$

ここで δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号であり，比例減衰を仮定した。 また，$E_{i\ell jm}$ は材料定数からなる4階のテンソルであり，応力テンソルを σ_{ij}，ひずみテンソルを $\varepsilon_{k\ell}$ とすると $\sigma_{ij} = E_{ijk\ell}\, \varepsilon_{k\ell}$ なる Hooke の法則が成り立つものとする。 なお，荷重ベクトル $P_{\gamma i}$ は次式のように表わせる。

$$P_{\gamma i} = Q^{(V)}_{\gamma i} + Q^{(S)}_{\gamma i} + Q^{(L)}_{\gamma i} + J_{\gamma i} \qquad (14)$$

ここで $Q^{(\ )}$ は分布力に等価な節点力を表わし，添字 V, S, L はそれぞれ体積，面積，線を表わす。 また J は初期ひずみに等価な節点力であり，(14) の個々のベクトルは次のとおりである。

$$Q^{(L)}_{\gamma i} = \int_\ell q^{(L)}_i\, \psi_\gamma \, d\ell \qquad (15)$$

$$Q^{(S)}_{\gamma i} = \int_s q^{(S)}_i\, \psi_\gamma \, ds \qquad (16)$$

$$Q_{\gamma i}^{(v)} = \int_v q_i^{(v)} \psi_\gamma \, dv \tag{17}$$

$$J_{\gamma i} = \int_v \frac{\partial \psi_\gamma}{\partial x_\ell} E_{i\ell mn} \eta_{mn} \, dv \tag{18}$$

ここで η_{mn} は初期ひずみテンソルである。有限要素から領域全体を組み立てる過程は同じであるから，ここでは代表的な有限要素についてだけ類似性を論じる。まず式(4),(10)を比較することにより，微分方程式の係数として次の対応がある。

$$m_{\alpha\beta} \to 0 \;;\; c_{\alpha i\beta j} \to c_{\alpha\beta} \;;\; k_{\alpha i\beta j} \to k_{\alpha\beta}$$
$$\rho_{\beta j} \to \phi_\beta \;;\; Q_{\alpha i}^{(v)} \to q_\alpha \;;\; Q_{\alpha i}^{(B)} \to q_\alpha^{(b)}$$

また，$k_{\delta\gamma}^{(d)}$ は弾性支承が対応することがわかる。なお，有限要素方程式の未知関数は構造解析の場合は3次元ベクトル関数であるのに対して，放物型方程式ではスカラー関数である。従って類似性を考えるうえでまず構造解析における未知変位の x_1 方向 $\rho_{\gamma 1}$ についてだけを考え，$\rho_{\gamma 2} = \rho_{\gamma 3} = 0$ とする。この結果，式(12)$^{(16),(17)}$は次のように書き換えることができる。

$$k_{\gamma 1 \delta 1} = \int_v \frac{\partial \psi_\gamma}{\partial X_I} E_{I1IJ} \frac{\partial \psi_\delta}{\partial X_J} \, dv \tag{19}$$

$$Q_{\gamma 1}^{(V)} = \int_{v} g_1^{(V)} \psi_\gamma \, dv \tag{20}$$

$$Q_{\gamma 1}^{(S)} = \int_{S} g_1^{(S)} \psi_\gamma \, dv \tag{21}$$

(5), (19) を比較することにより次の仮想の構成方程式を持つ弾性体について X_1 方向の変位だけが存在する場合は，(4) と等価であることが理解できる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & a_{13} \\ & \Sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \Sigma & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{22} & 0 & a_{23} \\ & \text{symm.} & & & \Sigma & 0 \\ & & & & & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \tag{22}$$

上式で Σ は任意定数である。　なお構成方程式を局所座標系で与え，それを変換する場合については注意を必要とする。すなわち，構造解析では Eijkl は4階のテンソルであるのに対して，式(1)の係数 a_{IJ} は2階のテンソルである。　また，この仮想の構成方程式から得られる応力は gradΦ に対応する。　減衰として，式(13)で比例減衰を仮定したが，式(7)との対応を考えるために $\alpha=1.0$，$\beta=0.0$ とすると

$$c_{\gamma 1 \delta 1} = \int_v \mu \psi_\gamma \psi_\delta \, dv \tag{23}$$

となり，(23)と(7)を比較することにより，$\mu=c$ とすることにより一致する。 また $k^{(b)}_{\gamma\delta}$ ではバネ定数 b を持つ弾性支承が対応し，$q^{(b)}_\gamma$ については弾性支承反力の(−)が対応するが，弾性支承されている面に分布荷重 $b\Phi_0$ を考えることにより計算できる。 また，式(17)をここで考えている自由度だけについて書き換えることにより

$$Q^{(v)}_{\gamma 1} = \int_v q^{(v)}_1 \psi_\gamma \, dv \tag{24}$$

となり，上式を(8)と比較することにより，$q^{(v)}_1 = q$ で q_γ が求められる。

以上のことにより，構造解析のための有限要素プログラムを変更することなしにこの種の問題に応用できることがわかった。 ただし，一般に境界 $\partial_2 R$ に対応した弾性支承のための要素が考慮されていない場合が多く，この種の境界については consistent に処理するためには，このための有限要素が必要となる。 なお上述の類似性は3次元問題について論じたが，この特別な場合として1次元，2次元および軸対称問題を考察することができる。 いままでに放物型方程式は構造解析の場合の特別な条件を持つものにすぎないことを示し

たが，多くの節点を持つ isoparametric 要素などのように，要素特性の評価に多くの計算時間を必要とする場合には実用上問題が生じるが，この場合も上述の類似性を考慮することにより，物理的解釈およびプログラムの変更等は比較的容易である。また，動的問題に用いられている Guyan の縮合法も応用でき，"定常縮合"として理解できる。

なお，楕円型方程式の代表的なものとして，定常の温度場などの支配方程式

$$\frac{\partial}{\partial X_I}\left(a_{IJ}\frac{\partial \phi}{\partial X_J}\right) + q = 0 \tag{25}$$

があるが，これは式(1)の特別な場合として考察でき，静的構造解析が対応する。

3. 双曲型偏微分方程式に対する類似性

双曲型方程式にかぎらず，工学における重要な問題として時間変数を含む場合がある。有限要素法を用いてこの種の問題を解析する場合，一般には前節のように，時間変数を分離し，空間において有限要素離散を行い，支配方程式として時間に関するマトリックス微分方程式を導き，これを時間方向について有限差分離散を用いて計算することが多い。また時間と空間の両者について有限要素モデルを組み立てる方

法が提案されているが，実際に解析された例は少なくかつその例も補間関数として時間と空間が分離された型（すなわち，ある時間での未知量は空間のみの変数と仮定された型）のいわゆる"可分"タイプのものだけである。可分タイプの要素モデルを用いる場合、有限要素解析の支配方程式は時間方向に対してバンド巾のせまい連立一次方程式となり，その解析はプログラム的に比較的容易である。しかし，この場合，時間方向に対して有限要素法の利点（モデルの任意性）を欠いてしまう。また、ある種の補間関数を用いた場合，その支配方程式は，有限差分法から導びかれたものと同一となる。

一方、任意のいわゆる"不可分"タイプの場合，その支配方程式は一般の連立一次方程式となり得るが，時間方向に対して部分構造解析法を用いることにより現象に応じた有限要素モデルの効率良い解析の可能性を持つ。ここでは，双曲型偏微分方程式に対して，時空間について有限要素モデルを組み立てた場合について考察し，この有限要素モデルと等価な弾性体の構成方程式を示す。

次の波動方程式を考える。

$$\frac{\partial}{\partial X_\alpha}\left(a_{\alpha\beta}\frac{\partial \phi}{\partial X_\beta}\right) - m\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + q = 0\,;\ a_{21}=a_{12},\ \underset{\sim}{X}\in R^2 \tag{26}$$

ここで $\underset{\sim}{\hat{X}}\in R^3$ を考える。すなわち，$\hat{X}_1=X_1$，$\hat{X}_2=X_2$，$\hat{X}_3=t$

この3次元時空 $\hat{\Omega}$ において有限要素離散を行うと次のマトリックス方程式が得られる。

$$g_{\gamma\delta}\,\phi_\delta = q_\gamma \tag{27}$$

ここで

$$g_{\gamma\delta} = \int_v \frac{\partial\psi_\gamma}{\partial\hat{X}_I}\,\hat{a}_{IJ}\,\frac{\partial\psi_\delta}{\partial\hat{X}_J}\,dv \tag{28}$$

$$q_\gamma = \int_v q\,\psi_\gamma\,dv \tag{29}$$

ただし、

$$\hat{a}_{IJ} = \delta_{I\alpha}\,a_{\alpha\beta}\,\delta_{\beta J} - \delta_{I3}\,m\,\delta_{3J} \tag{30}$$

ここで前節と同様の考察を行うことにより、次の仮想材料の構成方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ & \Sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \Sigma & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{22} & 0 & 0 \\ & & & & \Sigma & 0 \\ & & & & & -m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \tag{31}$$

なお、同様の考察が2次元弾性体の運動方程式についても行

とる。

双曲型方程式の場合、仮想構成方程式の物理的および数値的状態は、楕円型，放物型方程式の場合と異なり，計算すべき連立一次方程式の正値性の保証がなく、一般の構造問題に対する数値計算法をそのまま適用できない。

参考文献

H. TAKEDA "On Equivalent Finite Element Structural Models to the Numerical Analysis of Partial Differential Equation" Workshop Meeting on Computational Aspects of The Finite Element Method, ISD. & Univ. of. Stuttgart, Stuttgart. W.Germany, 1973